Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 24 gennaio 2007
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. (i) Si dia la definizione di insieme consistente massimale.

   (ii) Se X è un insieme consistente massimale e per la formula A si ha $A \in X$, cosa si può dire di $\neg A$? Si dimostri quanto affermato.

2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=, >\}$. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia la definizione di un predicato $P(x)$ che esprima la seguente frase "Tutti i numeri dispari minori di x sono primi". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:

$$\forall x \exists y \neg A(x, f(y)), \forall x \forall y (B(x) \to A(x, y)) \models \exists x \neg B(x)$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:

$$P \equiv \forall x (x \neq f(x)) \land \forall x \forall y [A(x, y) \to \neg A(f(y), f(x))]$$

   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.