Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 19 settembre 2006
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. (i) Sotto quali condizioni aggiuntive dall'ipotesi $\Gamma \models P$ segue che $\Gamma \models \forall x P$?

   (ii) Supposto che $\Gamma \models P$ e che le ipotesi individuate in (i) siano verificate, si dimostri dunque che $\Gamma \models \forall x P$.

2. Un numero è primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=, >\}$. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si scriva una formula che esprima la seguente frase "Ogni numero primo maggiore di due è dispari". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:

$$\exists x(A(x) \to B(x)), \exists x(C(x) \to D(x)), \forall x \neg B(x), \forall x \neg D(x) \models \neg \forall x(A(x) \wedge C(x))$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:

$$P = [\forall x A(x) \to \forall x B(x)] \to \forall x[A(x) \to B(x)].$$

   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.