Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 6 settembre 2006
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. (i) Sotto quali condizioni aggiuntive dalle ipotesi $\Gamma \models \exists x P$ e $\Gamma, P \models C$ segue che $\Gamma \models C$?

   (ii) Supposto che $\Gamma \models \exists x P$ e $\Gamma, P \models C$ e che le ipotesi individuate in (i) siano verificate, si dimostri dunque che $\Gamma \models C$.

2. Un numero è primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=, <\}$. Supponendo che questi simboli siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si scriva una formula che esprima la seguente frase "Ogni numero primo ha un numero primo maggiore di esso". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:

$$\forall x(A(f(x), x) \to \exists y A(y, f(y))), \forall x \forall y \neg A(x, f(y)) \models \forall x \neg A(f(x), x)$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:

$$P = A(a,b) \wedge A(a,c) \wedge b \neq c \wedge \forall x \forall y \forall z[y \neq z \wedge A(x,y) \wedge A(x,z) \to \exists p(p \neq y \wedge p \neq z \wedge A(y,p) \wedge A(z,p))].$$

   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.