Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 12 luglio 2006
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. Si dimostri (per induzione su t) il "lemma di sostituzione" per i termini del calcolo dei predicati:

   Siano t, s termini sulla segnatura Σ, x una variabile, $\mathcal{A}$ una struttura per Σ, ρ un ambiente su $\mathcal{A}$. Allora
$$[\![t[s/x]]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho} = [\![t]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho[x \leftarrow [\![s]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho}]}$$

2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e col simbolo di eguaglianza. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia una definizione per il predicato $P(x)$ la cui semantica è: "x è dispari ed è somma di un numero pari e di un numero dispari diverso da uno". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:
$$\forall x \forall y (A(x, y) \to \neg B(y, x)), \forall z \forall w (C(z, w) \to B(f(z), g(w)) \models \neg \forall x \forall y (A(x, y) \land C(x, y))$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:
$$P = \forall x \exists y (A(x) \to B(f(x), y)) \land \forall x \exists y (\neg A(x) \to B(f(x), y)).$$
   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 12 luglio 2006
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. Si dimostri (per induzione su t) il "lemma di sostituzione" per i termini del calcolo dei predicati:

   Siano t, s termini sulla segnatura Σ, x una variabile, $\mathcal{A}$ una struttura per Σ, ρ un ambiente su $\mathcal{A}$. Allora
$$[\![t[s/x]]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho} = [\![t]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho[x \leftarrow [\![s]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho}]}$$

2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e col simbolo di eguaglianza. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia una definizione per il predicato $P(x)$ la cui semantica è: "x è dispari ed è somma di un numero pari e di un numero dispari diverso da uno". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:
$$\forall x \forall y (A(x, y) \to \neg B(y, x)), \forall z \forall w (C(z, w) \to B(f(z), g(w)) \models \neg \forall x \forall y (A(x, y) \land C(x, y))$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:
$$P = \forall x \exists y (A(x) \to B(f(x), y)) \land \forall x \exists y (\neg A(x) \to B(f(x), y)).$$
   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.