Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 7 giugno 2006
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. Si dia la definizione di unificatore più generale (mgu).
2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e col simbolo di eguaglianza. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia una definizione per il predicato $P(x)$ la cui semantica è: "se x è pari, allora è somma di due numeri dispari distinti". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).
3. Si consideri la classe di formule predicative costruite usando soltanto un singolo predicato unario A, il connettivo $\wedge$ e il quantificatore $\forall$. Si provi che ogni tale formula è soddisfacibile. Suggerimento: Si individui per prima cosa un'opportuna struttura in cui tali formule sono soddisfatte e si dimostri poi formalmente tale fatto, procedendo per induzione sulla struttura delle formule.
4. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:
$$\forall x(A(x) \to \neg\exists y B(g(x), f(y))), \forall z \forall w B(z, w) \models \neg\exists x A(h(x))$$
5. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.
6. È data la formula:
$$P = \exists x \forall y(A(x) \wedge \neg B(f(x), y)) \wedge \forall x \exists y(B(f(y), x) \wedge \neg A(y)).$$
La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 7 giugno 2006
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. Si dia la definizione di unificatore più generale (mgu).
2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e col simbolo di eguaglianza. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia una definizione per il predicato $P(x)$ la cui semantica è: "se x è pari, allora è somma di due numeri dispari distinti". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).
3. Si consideri la classe di formule predicative costruite usando soltanto un singolo predicato unario A, il connettivo $\wedge$ e il quantificatore $\forall$. Si provi che ogni tale formula è soddisfacibile. Suggerimento: Si individui per prima cosa un'opportuna struttura in cui tali formule sono soddisfatte e si dimostri poi formalmente tale fatto, procedendo per induzione sulla struttura delle formule.
4. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:
$$\forall x(A(x) \to \neg\exists y B(g(x), f(y))), \forall z \forall w B(z, w) \models \neg\exists x A(h(x))$$
5. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.
6. È data la formula:
$$P = \exists x \forall y(A(x) \wedge \neg B(f(x), y)) \wedge \forall x \exists y(B(f(y), x) \wedge \neg A(y)).$$
La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.