Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 25 gennaio 2006
Tempo a disposizione: ore 2:00.

Si risponda su QUESTI fogli, scrivendo il nome SU OGNI FOGLIO.

Non è consentita la consultazione di altro materiale, né l'uso di altri fogli.

1. Si dia la definizione di insieme consistente massimale. Si dimostri poi che, se Γ è un insieme consistente massimale, allora $P \wedge Q \in \Gamma$ se e solo se $P \in \Gamma$ e $Q \in \Gamma$.

2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e coi simboli di eguaglianza. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia una definizione per il predicato $P(x, y)$ la cui semantica è: "il prodotto di x per y è un quadrato perfetto dispari". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri che la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[(\exists y A(x,y)) \to B(x)], A(c, g(c)) \vdash B(c).$$

4. Si dimostri per risoluzione la validità della seguente formula:

$$\forall x \exists y \neg[(A(x,x) \rightarrow \neg A(x,y)) \wedge (\neg A(x,y) \rightarrow A(x,x))].$$

5. È data la formula:

$$P = (\forall x \exists y R(x, y)) \wedge (\forall x \exists y R(y, x)) \wedge \exists x \neg R(x, x).$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.