Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 20 settembre 2005
Tempo a disposizione: ore 2:00.

Si risponda su QUESTI fogli, scrivendo il nome SU OGNI FOGLIO.

Non è consentita la consultazione di altro materiale, né l'uso di altri fogli.

1. Si dimostri la seguente proposizione:

   Sia Γ un insieme consistente massimale; allora $P \in \Gamma$ se e solo se $\neg P \notin \Gamma$.

2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e coi simboli di eguaglianza e minore-o-eguale ($\leq$). Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia una definizione per il predicato $P(x, y)$ la cui semantica è: "y è il più piccolo numero dispari multiplo di x". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Sono date le due clausole predicative $C_1 = \{A(x), A(f(x))\}$ e $C_2 = \{\neg A(f(g(y))), \neg A(z)\}$. Alice afferma che, a partire da queste due clausole, è possibile dedurre per risoluzione la clausola vuota con un solo passo di risoluzione. Bernardo afferma, al contrario, che non è possibile dedurre la clausola vuota a partire da C_1 e C_2. Chi dei due ha ragione? Si motivi brevemente la risposta. Inoltre, se ha ragione Alice, si dia anche la sostituzione necessaria.

4. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri che la seguente formula è valida (Suggerimento: si usi nella dimostrazione un'istanza del terzo escluso):

$$\neg\exists x\forall y[(A(x,y) \to \neg A(x,x)) \wedge (\neg A(x,x) \to A(x,y))].$$

5. Si dimostri per risoluzione la validità della seguente formula (è la stessa dell'esercizio precedente):

$$\neg\exists x\forall y[(A(x,y) \rightarrow \neg A(x,x)) \wedge (\neg A(x,x) \rightarrow A(x,y))]$$

6. Si consideri la seguente formula su un linguaggio che include tre costanti a, b e c e due simboli di predicato binari R e $\neq$:

$$P = R(a,b) \wedge R(a,c) \wedge b \neq c \wedge \forall x \forall y \forall z [R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge y \neq z \rightarrow \exists p R(y,p) \wedge R(z,p)].$$

Nell'ipotesi che il simbolo $\neq$ sia interpretato in modo canonico come la negazione dell'identità, si diano: (i) un modello *finito* (cioè con dominio finito) di P; (ii) un'interpretazione che falsifica P; (iii) Facoltativo: un modello *infinito* di P; (iv) Facoltativo: il modello di P di minima cardinalità.