

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale il seguente fatto:

$$\forall x[A(f(x)) \rightarrow B(x)] \vdash (\forall x[B(g(x)) \rightarrow \perp]) \rightarrow \neg A(f(g(\mathbf{c}))).$$

2. Si dimostri per risoluzione la seguente conseguenza logica:

$$\neg \forall x \forall y[A(x, y) \rightarrow B(g(x))] \wedge \forall x \forall y[A(x, y) \rightarrow A(x, f(x))] \models \exists x[A(x, f(x)) \wedge \neg B(g(x))].$$

3. È data la formula:

$$P = \forall x \forall y[A(x, y) \rightarrow (A(x, f(y)) \wedge A(g(x), y))] \rightarrow A(g(g(\mathbf{c})), f(\mathbf{c})).$$

La formula  $P$  è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se  $P$  è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula  $\neg P$ . Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui  $P$  è vera che una in cui  $P$  è falsa.

4. Si dimostri per risoluzione la seguente formula:

$$\neg((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vee (B \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow A \wedge B \wedge \neg C.$$