Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 9 giugno 2004

Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale la seguente conseguenza logica:

$$\exists x A(x) \wedge \forall x(A(x) \to A(f(x))) \wedge \forall x(A(x) \to A(g(x))) \models \exists x A(f(g(x)))$$

Soluzione Sia $P = \exists x A(x) \wedge \forall x(A(x) \to A(f(x))) \wedge \forall x(A(x) \to A(g(x)))$.

$$\dfrac{\dfrac{P}{\exists x A(x)}\wedge\mathcal{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{P}{\forall x(A(x) \to A(g(x)))}\wedge\mathcal{E}}{A(x) \to A(g(x))}\forall\mathcal{E}}{A(g(x))}\to\mathcal{E} \qquad \dfrac{\dfrac{P}{\forall(A(x) \to A(f(x)))}\wedge\mathcal{E}}{A(g(x)) \to A(f(g(x)))}\forall\mathcal{E}}{A(f(g(x)))}\to\mathcal{E}}{\exists x A(f(g(x)))}\exists\mathcal{I}}{\exists x A(f(g(x)))}\exists\mathcal{E}:1$$

Si osservi che la seguente deduzione è, invece, scorretta:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{\exists x A(x)}\wedge\mathcal{E} \qquad \dfrac{\dfrac{[A(x)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{P}{\forall x(A(x) \to A(g(x)))}\wedge\mathcal{E}}{A(x) \to A(g(x))}\forall\mathcal{E}}{A(g(x))}\to\mathcal{E} \qquad \dfrac{\dfrac{P}{\forall(A(x) \to A(f(x)))}\wedge\mathcal{E}}{A(g(x)) \to A(f(g(x)))}\forall\mathcal{E}}{A(f(g(x)))}\to\mathcal{E}}{A(f(g(x)))}\exists\mathcal{E}:1:*}{\exists x A(f(g(x)))}\exists\mathcal{I}$$

in quanto la regola marcata con (*) viola la condizione a margine della regola $\exists\mathcal{E}$: x è infatti libera nella premessa (minore) della regola.

2. Si dimostri per risoluzione la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[A(x) \to \exists y R(x, f(y))], \forall x \forall y[R(x, y) \to R(x, f(y))], A(\mathbf{c}) \models \exists x \exists y R(x, f(f(y)))$$

Soluzione Negando la formula a destra di $\models$, ridenominando le variabili e portandola in forma prenessa si ottiene $\forall w \forall z \neg R(w, f(f(z)))$. Ridenominando ove necessario e portando in forma prenessa le formule a sinistra di $\models$, si ottiene, rispettivamente: $\forall x \exists y[\neg A(x) \vee R(x, f(y))]$, $\forall u \forall v[\neg R(u, v) \vee R(u, f(v))]$, $A(\mathbf{c})$. La skolemizzazione è necessaria per la prima di tali formula, dove compare $\exists y$ nella portata di $\forall x$. Dobbiamo introdurre un *nuovo* simbolo di funzione, diciamo $\mathbf{h}$, di arità uno, che da' luogo alla formula skolemizzata $\forall x[\neg A(x) \vee R(x, f(\mathbf{h}(x)))]$. In conclusione abbiamo le seguenti clausole:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\neg A(x), R(x, f(\mathbf{h}(x)))\} \\ C_2 &= \{\neg R(u, v), R(u, f(v))\} \\ C_3 &= \{A(\mathbf{c})\} \\ C_4 &= \{\neg R(w, f(f(z)))\} \end{aligned}$$

Applichiamo adesso la procedura di risoluzione:

$$\begin{array}{lll} C_5 & \mathsf{Ris}(1,3)\{\mathbf{c}/x\} & \{R(\mathbf{c}, f(\mathbf{h}(\mathbf{c})))\} \\ C_6 & \mathsf{Ris}(2,6)\{\mathbf{c}/u, f(\mathbf{h}(\mathbf{c}))/v\} & \{R(\mathbf{c}, f(f(\mathbf{h}(\mathbf{c}))))\} \\ C_7 & \mathsf{Ris}(4,7)\{\mathbf{c}/w, \mathbf{h}(\mathbf{c})/z\} & VOID \end{array}$$

3. La formula seguente è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria?

$$P = [\exists x A(x, x) \wedge \forall x \forall y(A(x, y) \to A(x, f(x)))] \to \exists x A(f(x), x).$$

Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione La formula è soddisfacibile ma non valida. Un modello per P è molto semplice da trovare: basta prendere la struttura con un solo elemento e interpretare A come sempre vera. In formule, sia $\mathcal{B} =< \{0\}, \{f^{\mathcal{B}}\}, \{A^{\mathcal{B}}\} >$, dove $f^{\mathcal{B}}(0) = 0$ e $A^{\mathcal{B}}(0,0) = V$. È immediato vedere che $\mathcal{B} \models P$.

Una struttura in cui, invece, P sia falsa la si può ottenere osservando che la premessa dell'implicazione principale di P è vera sui naturali se interpretiamo A come $\leq$ e f con una funzione crescente, per esempio il successore. Prendiamo allora $\mathcal{C} =< \mathbf{Nat}, \{succ\}, \{\leq\} >$. Come osservato, $\mathcal{C} \models \exists x A(x,x) \wedge \forall x \forall y (A(x,y) \rightarrow A(x, f(x)))$; d'altra parte è immediato rendersi conto che $\mathcal{C} \not\models \exists x A(f(x), x)$. Ne segue che $\mathcal{C} \not\models P$.

4. Si stabilisca la validità della seguente formula usando a scelta uno dei seguenti metodi: (i) deduzione naturale; (ii) risoluzione; (iii) equivalenze semantiche del Teorema 1.25.

$$\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg\neg C \rightarrow (\neg(\neg A \vee B \vee C) \rightarrow \bot)$$

Soluzione La tecnica più economica, in questo caso, è data dalla procedura di risoluzione. Negando la formula assegnata e portandola in forma normale congiuntiva si ottiene, con qualche semplificazione,

$$A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg C.$$

Si tratta di quattro clausole distinte. La risoluzione proposizionale tra la terza e la quarta clausola da' immediatamente la clausola vuota.

5. Si dimostri la seguente formula nel calcolo della deduzione naturale:

$$\neg\neg\forall x A(x) \rightarrow \forall x \neg\neg A(x)$$

Soluzione

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\neg\forall x A(x)]^1$}
\AxiomC{$[\neg A(x)]^2$}
\AxiomC{$[\forall x A(x)]^3$}
\RightLabel{$\forall\mathcal{E}$}
\UnaryInfC{$A(x)$}
\RightLabel{$\neg\mathcal{E}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg\mathcal{I} : 3$}
\UnaryInfC{$\neg\forall x A(x)$}
\RightLabel{$\neg\mathcal{E}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg\mathcal{I} : 2$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A(x)$}
\RightLabel{$\forall\mathcal{I}$}
\UnaryInfC{$\forall x \neg\neg A(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow\mathcal{I} : 1$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\forall x A(x) \rightarrow \forall x \neg\neg A(x)$}
\end{prooftree}$$