Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 23 settembre 2003

Tempo a disposizione: ore 2:00.
Si scriva in *calligrafia* (dal greco: kalos=bello e graphe=scrittura) o il compito non sarà valutato.
Scrivere la soluzione degli esercizi (1, 3) e (2,4) su fogli distinti.

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che la formula seguente è valida:

$$\forall z[(\neg A(z) \vee B(z)) \to (A(z) \to B(z))]$$

Soluzione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A(z) \vee B(z)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A(z)]^1 \quad [A(z)]^2}{\bot}\,\neg\mathcal{E}}{B(z)}\,\bot\mathcal{E} \qquad [B(z)]^1}{B(z)}\,\vee\mathcal{E}:1}{A(z) \to B(z)}\,\to\mathcal{I}:2}{(\neg A(z) \vee B(z)) \to (A(z) \to B(z))}\,\to\mathcal{I}:3}{\forall z[(\neg A(z) \vee B(z)) \to (A(z) \to B(z))]}\,\forall\mathcal{I}$$

2. Si dimostri per risoluzione che

$$\forall x \exists z \forall y[(B(z) \to A(y)) \wedge (C(z) \to D(x)) \wedge B(z) \wedge \neg D(z)] \models \exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg D(x))$$

Soluzione Se trasformiamo in una forma di Skolem la premessa, otteniamo prima

$$\forall x \exists z \forall y[(\neg B(z) \vee A(y)) \wedge (\neg C(z) \vee D(x)) \wedge B(z) \wedge \neg D(z).$$

Eliminiamo ora il quantificatore esistenziale, sostituendo la variabile z con $\mathbf{f}(x)$, ottenendo

$$\forall x \forall y[(\neg B(\mathbf{f}(x)) \vee A(y)) \wedge (\neg C(\mathbf{f}(x)) \vee D(x)) \wedge B(\mathbf{f}(x)) \wedge \neg D(\mathbf{f}(x))],$$

ovvero, le clausole:

$$\begin{array}{l} C_1 = \{\neg B(\mathbf{f}(x)), A(y)\} \\ C_2 = \{\neg C(\mathbf{f}(x)), D(x)\} \\ C_3 = \{B(\mathbf{f}(x))\} \\ C_4 = \{\neg D(\mathbf{f}(x))\}. \end{array}$$

Negando infine la formula a destra di $\models$, e ridenominando le variabili legate, si ottiene la clausola

$$C_5 = \{\neg A(z), \neg B(z), C(z), D(z)\}.$$

La procedura di risoluzione procede ora senza grandi problemi; per condurla in porto con precisione, tuttavia, occorre osservare che, nonostante le clausole da C_1 a C_4 condividano tutte la stessa variabile x, tale condivisione è solo apparente: ogni volta che si applica un passo di risoluzione, le due clausole che intervengono devono essere ridenominate (con variabili "*fresche*") in modo da avere sempre variabili disgiunte.

$$\begin{array}{rll} C_6 & \mathsf{Ris}(1,5)\{y/z\} & \{\neg B(\mathbf{f}(x)), \neg B(y), C(y), D(y)\} \\ C_7 & \mathsf{Ris}(6,3\{z/x\})\{z/x, \mathbf{f}(z)/y\} & \{C(\mathbf{f}(z)), D(\mathbf{f}(z))\} \\ C_8 & \mathsf{Ris}(7,2)\{z/x\} & \{D(z), D(\mathbf{f}(z))\} \\ C_9 & \mathsf{Ris}(8,4)\{z/x\} & \{D(z)\} \\ C_{10} & \mathsf{Ris}(9,4)\{\mathbf{f}(x)/z\} & VOID. \end{array}$$

Nella riga relativa alla clausola C_7 , si è indicato con $\mathsf{Ris}(6,3\{z/x\})$ l'applicazione della risoluzione tra C_6 e C_3, dopo che in quest'ultima la x è stata ridenominata in z, per evitare conflitto con la x della clausola C_6[1]. Si osservi, infine, che la clausola vuota *non* poteva essere ottenuta direttamente dalla C_8 e dalla C_4 cancellando "in un colpo solo" i due letterali positivi $D(\ldots)$: non esiste infatti nessuna sostituzione che permetta di unificare simultaneamente $D(z), D(\mathbf{f}(z))$ e $D(\mathbf{f}(x))$.

[1] L'applicazione — *erronea* — della risoluzione senza ridenominazione, in questo caso non portava a problemi significativi: $\mathsf{Ris}(6,3)\{\mathbf{f}(x)/y\}$ dava la clausola $\{C(\mathbf{f}(x)), D(\mathbf{f}(x))\}$, che a meno di ridenominazione è proprio C_7. Si vuole però qui richiamare l'attenzione sul fatto che, in generale, la ridenominazione si deve sempre effettuare quando vi sono variabili in comune.

3. Determinare una forma di Skolem per la formula:

$$[(\exists x \forall y B(x,y)) \to (\forall z \exists y B(y,z))] \to \exists z \forall w A(w,z)$$

Soluzione Routine.

4. La formula seguente è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria?

$$P = [\forall x A(x) \to \exists x B(x)] \to \forall x (A(x) \to B(x))$$

Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione La formula P è soddisfacibile e non valida. In ogni interpretazione in cui sia A che B siano sempre veri, P è vera. Al contrario P è falsa nell'interpretazione $\mathcal{E} =< D, \emptyset, \{A^{\mathcal{E}}, B^{\mathcal{E}}\} >$, dove $D = \{0,1\}$ e $A^{\mathcal{E}}$ vale sia su 0 che su 1, mentre $B^{\mathcal{E}}$ vale su 1 ma non su 0.