Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 1 luglio 2003

Tempo a disposizione: ore 2:00.
Si scriva in *calligrafia* (dal greco: kalos=bello e graphe=scrittura) o il compito non sarà valutato.

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che la formula seguente è valida:

$$[\exists y(B(y) \to C(y)) \wedge \forall x B(x)] \to \exists x C(x).$$

Soluzione Sia $P = \exists y(B(y) \to C(y)) \wedge \forall x B(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^2}{\exists y(B(y)\to C(y))}\wedge\mathcal{E} \qquad \dfrac{\dfrac{[B(x)\to C(x)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[P]^2}{\forall x B(x)}\wedge\mathcal{E}}{B(x)}\forall\mathcal{E}}{C(x)}\to\mathcal{E}}{\exists x C(x)}\exists\mathcal{I}}{\exists x C(x)}\exists\mathcal{E}:1}{P\to\exists x C(x)}\to\mathcal{I}:2$$

Abbiamo dunque stabilito che $\vdash [\exists y(B(y) \to C(y)) \wedge \forall x B(x)] \to \exists x C(x)$. Essendo il calcolo della deduzione naturale completo per la validità (cioè da $\vdash Q$ segue $\models Q$), si ha quanto richiesto.

Attenzione! La seguente derivazione *è scorretta*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^2}{\exists y(B(y)\to C(y))}\wedge\mathcal{E} \qquad \dfrac{[B(x)\to C(x)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[P]^2}{\forall xB(x)}\wedge\mathcal{E}}{B(x)}\forall\mathcal{E}}{C(x)}\to\mathcal{E}}{C(x)}\exists\mathcal{E}:1\ \textbf{no!}}{\exists x C(x)}\exists\mathcal{I}}{P\to\exists xC(x)}\to\mathcal{I}:2$$

perché nella regola $\exists\mathcal{E}$ non è rispettata la condizione a margine che la variabile "fresca" introdotta nella foglia che verrà scaricata (in questo caso la x che sostituisce la y) non sia libera nella premessa minore della regola di $\exists\mathcal{E}$ stessa (in questo caso la formula $C(x)$).

2. Si dimostri per risoluzione che

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \wedge \forall x(A(x) \to C(x)) \wedge \forall x(B(x) \to C(\mathbf{f}(x))) \models \exists x C(x).$$

Soluzione Possiamo semplificarci il lavoro osservando che quello che viene richiesto è equivalente, in base alla definizione di conseguenza logica, a

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)), \forall x(A(x) \to C(x)), \forall x(B(x) \to C(\mathbf{f}(x))) \models \exists x C(x).$$

Lavoriamo ora sulle formule a sinistra di $\models$: ridenominiamo le variabili legate, portiamo all'esterno i quantificatori, convertiamo le matrici in forma congiuntiva:

$$\begin{array}{rl} & \exists x(A(x) \wedge B(x)), \forall x(A(x) \to C(x)), \forall x(B(x) \to C(\mathbf{f}(x))) \\ \equiv & \exists x(A(x) \wedge B(x)), \forall y(A(y) \to C(y)), \forall z(B(z) \to C(\mathbf{f}(z))) \\ \equiv & \exists x(A(x) \wedge B(x)), \forall y(\neg A(y) \vee C(y)), \forall z(\neg B(z) \vee C(\mathbf{f}(z))) \end{array}$$

Possiamo ora eliminare il quantificatore esistenziale, introducendo una nuova constante $\mathbf{c}$:

$$(A(\mathbf{c}) \wedge B(\mathbf{c})), \forall y(\neg A(y) \vee C(y)), \forall z(\neg B(z) \vee C(\mathbf{f}(z)))].$$

Adesso ci concentriamo sulla formula a destra di $\models$: ridenominiamo la variabile, neghiamo e portiamo in una forma di Skolem:

$$\neg\exists v C(v) \equiv \forall v \neg C(v).$$

Dobbiamo ora dimostrare che dalle clausole

$$\begin{array}{l} C_1 = \{A(\mathbf{c})\} \\ C_2 = \{B(\mathbf{c})\} \\ C_3 = \{\neg A(y), C(y)\} \\ C_4 = \{\neg B(z), C(\mathbf{f}(z))\} \\ C_5 = \{\neg C(v)\} \end{array}$$

possiamo ottenere la clausola vuota per risoluzione. Possiamo derivare:

$$\begin{array}{lll} C_6 & \mathsf{Ris}(1,3)\{\mathbf{c}/y\} & \{C(\mathbf{c})\} \\ C_7 & \mathsf{Ris}(6,5)\{\mathbf{c}/v\} & VOID \end{array}$$

3. Determinare una forma di Skolem per la formula:

$$[(\forall x \exists y A(x,y)) \to (\exists x \forall y A(y,z))] \wedge \forall z B(w,z)$$

Soluzione: Il procedimento è puramente meccanico; qui si deve solo fare attenzione al fatto che vi sono alcune variabili libere (la z nella formula a destra di $\to$ e la w in quella a destra di $\wedge$), che sono sottintese quantificate universalmente all'esterno della formula. Queste variabili entreranno in gioco al momento dell'introduzione dei simboli di Skolem.

$$\begin{array}{ll} & [(\forall x \exists y A(x,y)) \to (\exists x \forall y A(y,z))] \wedge \forall z B(w,z) \\ \equiv & [(\forall x \exists y A(x,y)) \to (\exists u \forall v A(v,z))] \wedge \forall t B(w,t) \\ \equiv & \exists x \forall y [(A(x,y)) \to (\exists u \forall v A(v,z))] \wedge \forall t B(w,t) \\ \equiv & \exists x \forall y \exists u \forall v [A(x,y) \to A(v,z)] \wedge \forall t B(w,t) \\ \equiv & \exists x \forall y \exists u \forall v [(A(x,y) \to A(v,z)) \wedge \forall t B(w,t)] \\ \equiv & \exists x \forall y \exists u \forall v \forall t [(A(x,y) \to A(v,z)) \wedge B(w,t)] \\ \equiv & \exists x \forall y \exists u \forall v \forall t [(\neg A(x,y) \vee A(v,z)) \wedge B(w,t)] \end{array}$$

Ricordiamo ora che le variabili libere (z e w) sono quantificate universalmente all'esterno della formula. Vale a dire che è come se avessimo a che fare con la formula:

$$\forall z \forall w \exists x \forall y \exists u \forall v \forall t [(\neg A(x,y) \vee A(v,z)) \wedge B(w,t)].$$

Sostitutiamo adesso le costanti di Skolem al posto delle variabili quantificate esistenzialmente:

$$\begin{array}{lll} x & \text{con} & \mathbf{f}(z,w) \\ u & \text{con} & \mathbf{g}(z,w,y), \end{array}$$

ottenendo (siccome la u non compare nella formula se non nel quantificatore):

$$\forall z \forall w \forall y \forall v \forall t [(\neg A(\mathbf{f}(z,w),y) \vee A(v,z)) \wedge B(w,t)]$$

4. Le formule seguenti sono valide ?

$$P = [\exists x A(x) \to \forall x B(x)] \to \forall x (A(x) \to B(x))$$

$$Q = [\exists x A(x) \to \exists x B(x)] \to \forall x (A(x) \to B(x))$$

In caso positivo darne una dimostrazione nel sistema formale preferito. In caso contrario mostrarne un contromodello.

Soluzione: P è valida. Ce ne possiamo convincere con un ragionamento informale come segue. Supponiamo vera la premessa $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$; dobbiamo mostrare che è vera anche la conclusione $\forall x(A(x) \to B(x))$. Sia dunque c un generico elemento: se $A(c)$ è falsa, non c'è nulla da dimostrare (perché l'implicaziojne è vacuamente vera); se invece $A(c)$ è vera, è vera anche $\exists x A(x)$ (c è infatti un testimone dell'esistenziale); avendo supposto che $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$, sappiamo allora che $\forall x B(x)$ è vera; in particolare sarà vera $B(c)$, che è quanto dovevamo stabilire. Rimane ora da *dimostrare* P. La seguente è una derivazione in deduzione naturale.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x A(x) \to \forall x B(x)]^2 \quad \dfrac{[A(x)]^1}{\exists x A(x)}\,\exists\mathcal{I}}{\forall x B(x)}\,\to\mathcal{E}}{B(x)}\,\forall\mathcal{E}}{A(x) \to B(x)}\,\to\mathcal{I}:1}{\forall x(A(x) \to B(x))}\,\forall\mathcal{I}}{P}\,\to\mathcal{I}:2$$

Q è invece non valida. Una interpretazione in cui è falsa (cioè un contromodello) è $\mathcal{D} =< D, \emptyset, \{A^{\mathcal{D}}, B^{\mathcal{D}} >$ dove D è un insieme con due elementi (diciamo $D = \{0,1\}$) e $A^{\mathcal{D}}$ vale su 0 ma non su 1, mentre $B^{\mathcal{D}}$ vale su 1 ma non su 0. È facile vedere che $\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ è vera, mentre la conclusione $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ è falsa. Si osservi che Q *non* è una contraddizione: è soddisfacibile. Una interpretazione in cui è soddisfatta è quella col dominio costituito da un unico elemento, su cui valgono sia A che B.