Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 3 giugno 2003

Tempo a disposizione: ore 2:00.
Si scriva in *calligrafia* (dal greco: kalos=bello e graphe=scrittura) o il compito non sarà valutato.

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che la formula seguente è valida:

$$(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B).$$

**Soluzione**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [A \to B]^4}{B}\to\mathcal{E} \qquad [\neg B]^2}{\bot}\neg\mathcal{E}}{\neg A}\neg\mathcal{I}:1}{\dfrac{\bot}{\neg\neg B}\neg\mathcal{I}:2}\neg\mathcal{E}}{\neg\neg A \to \neg\neg B}\to\mathcal{I}:3}{(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)}\to\mathcal{I}:4$$

2. Si dimostri per risoluzione che:

$$\forall x \forall y[B(x) \land \neg A(y,y) \to A(x,y)], \forall y[A(y,y) \to \neg\exists x(B(x) \land A(x,y))] \models \neg\exists x B(x).$$

**Soluzione** In ordine dobbiamo:

(a) Negare la formula a destra di $\models$: $\neg\neg\exists x B(x) \equiv \exists x B(x)$;

(b) Trasformare quest'ultima formula in forma normale di Skolem: $B(\mathbf{c})$, con $\mathbf{c}$ nuova costante;

(c) Trasformare in forma normale di Skolem la prima premessa:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y[B(x) \land \neg A(y,y) \to A(x,y)] &\equiv \forall x \forall y[\neg(B(x) \land \neg A(y,y)) \lor A(x,y)] \\ &\equiv \forall x \forall y[\neg B(x) \lor A(y,y) \lor A(x,y)] \end{aligned}$$

Adesso che la formula è in forma prenessa e la matrice in forma normale congiuntiva, possiamo eliminare i quantificatori (non ci sono esistenziali), ottenendo

$$\neg B(x) \lor A(y,y) \lor A(x,y)$$

(d) Trasformare in forma normale di Skolem la seconda premessa:

$$\begin{aligned} \forall y[A(y,y) \to \neg\exists x(B(x) \land A(x,y))] &\equiv \forall y[\neg A(y,y) \lor \forall x \neg(B(x) \land A(x,y))] \\ &\equiv \forall y \forall x[\neg A(y,y) \lor \neg B(x) \lor \neg A(x,y))] \end{aligned}$$

Adesso è opportuno ridenominare la variabili (avere variabili distinte in clausole distinte è essenziale durante la risoluzione), ottenendo:

$$\forall v \forall w[\neg A(v,v) \lor \neg B(w) \lor \neg A(w,v))]$$

Eliminando i quantificatori (non ci sono esistenziali):

$$\neg A(v,v) \lor \neg B(w) \lor \neg A(w,v))$$

(e) Dimostriamo ora per risoluzione che da:

$$\begin{aligned} &C_1 = \{\neg B(x), A(y,y), A(x,y)\} \\ &C_2 = \{\neg A(v,v), \neg B(w), \neg A(w,v))\} \\ &C_3 = B(\mathbf{c}) \end{aligned}$$

è possibile derivare la clausola vuota:

$$\begin{array}{lll} C_4 & \mathsf{Ris}(1,2)\{y/v, y/w, y/x\} & \neg B(y) \\ C_5 & \mathsf{Ris}(5,3)\{\mathbf{c}/y\} & VOID \end{array}$$

3. Si trasformi in forma normale di Skolem la formula:

$$[\forall x \exists y A(x,y) \to \exists x \neg \exists y B(x,y)] \wedge \neg \exists x \forall y B(y,x).$$

**Soluzione**

$$\begin{array}{rl} & [\forall x \exists y A(x,y) \to \exists x \neg \exists y B(x,y)] \wedge \neg \exists x \forall y B(y,x) \\ \equiv & [\forall x \exists y A(x,y) \to \exists x \forall y \neg B(x,y)] \wedge \forall x \exists y \neg B(y,x) \\ \equiv & [\forall x \exists y A(x,y) \to \exists u \forall v \neg B(u,v)] \wedge \forall w \exists z \neg B(z,w) \\ \equiv & [\exists x \forall y [A(x,y) \to \exists u \forall v \neg B(u,v)]] \wedge \forall w \exists z \neg B(z,w) \\ \equiv & [\exists x \forall y \exists u \forall v (A(x,y) \to \neg B(u,v))] \wedge \forall w \exists z \neg B(z,w) \\ \equiv & \exists x \forall y \exists u \forall v [(A(x,y) \to \neg B(u,v)) \wedge \forall w \exists z \neg B(z,w)] \\ \equiv & \exists x \forall y \exists u \forall v \forall w \exists z [(A(x,y) \to \neg B(u,v)) \wedge \neg B(z,w)] \\ \equiv & \exists x \forall y \exists u \forall v \forall w \exists z [(\neg A(x,y) \vee \neg B(u,v)) \wedge \neg B(z,w)] \end{array}$$

Rimane adesso da sostituire le costanti di Skolem al posto delle variabili quantificate universalmente. Sostituiamo:

$$\begin{array}{lll} x & \text{con} & \mathbf{c} \\ u & \text{con} & \mathbf{f}(y) \\ z & \text{con} & \mathbf{g}(y,v,w), \end{array}$$

ottenendo finalmente

$$\forall y \forall v \forall w [(\neg A(\mathbf{c},y) \vee \neg B(\mathbf{f}(y),v)) \wedge \neg B(\mathbf{g}(y,v,w),w)].$$

4. Vale la seguente conseguenza logica?

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \models \exists x (A(x) \wedge \neg B(x)).$$

In caso positivo darne una dimostrazione nel sistema formale preferito. In caso contrario mostrarne un contromodello.
**Soluzione** È immediato rendersi conto che la conseguenza logica non può valere: la conclusione è la negazione della premessa! Una qualsiasi struttura costituisce dunque un contromodello (cioè una struttura in cui la premessa è vera, ma la conclusione è falsa). La più semplice è la struttura

$$\mathcal{D} =< D = \{\bullet\}, \emptyset, A^{\mathcal{D}} = B^{\mathcal{D}} = D >$$

cioè la struttura il cui dominio è costituito da un solo elemento e dove sia $A$ che $B$ sono interpretati come veri sull'unico elemento.

5. Descrivere tutti i modelli della formula

$$\forall x \exists y (x \neq y \wedge x < y)$$

assumendo che $\neq$ e $<$ abbiano sempre il loro significato standard (cioè $\neq$ è sempre interpretato con "diverso" e $<$ con "minore di" in una relazione di ordine parziale).
**Soluzione** Un modello di una formula è, per definizione, una struttura

(a) capace di interpretare tutti i simboli ivi presenti (simboli di costante e funzione: che non sono presenti nella formula data; simboli di predicato: nel caso in questione $\neq$ e $<$);

(b) nella quale la formula in questione è vera.

Pertanto tutti i modelli della formula assegnata devono essere ordini parziali (per soddisfare (a)); inoltre, per soddisfare (b) in ciascuno di essi deve esistere una catena infinita crescente.