

# Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica  
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA  
20/09/2019

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi delle liste di numeri naturali:

$$L ::= [] \mid \mathbb{N} :: L$$

dove  $::$  è associativo a destra. Scrivere la funzione ricorsiva strutturale  $f(L)$  che restituisce una sotto-lista di lunghezza massimale di numeri ordinati in maniera strettamente crescente.

Esempi di possibili output:

- $f(1 :: 1 :: 2 :: 3 :: 2 :: 3 :: []) = 1 :: 2 :: 3 :: []$
- $f(1 :: 1 :: 3 :: 2 :: 3 :: []) = 1 :: 3 :: []$
- $f(1 :: 1 :: 3 :: 2 :: 3 :: []) = 2 :: 3 :: []$

È possibile utilizzare funzioni ausiliarie su liste, da definirsi usando la ricorsione strutturale, funzioni ausiliarie su numeri (da non definirsi) e/o passare parametri ausiliari alle funzioni.

3 (3 punti). Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi che

$$\forall A \forall A' \forall B \forall B' (A \subseteq A' \wedge B \subseteq B' \Rightarrow A \times B \subseteq A' \times B')$$

Esplicitare gli assiomi di teoria degli insiemi utilizzati e scrivere la dimostrazione informalmente, ma seguendo i passaggi di una dimostrazione in deduzione naturale al prim'ordine.

4 (2 punti). Dimostrare l'esistenza di  $2^{2^n}$  connettivi  $n$ -ari.

6 (1 punto). Dare la definizione e una caratterizzazione alternativa delle formule insoddisfacibili.

7 (6 punti). Considerare il seguente predicato sulle formule della logica proposizionale prive di negazione e implicazione logica:

$$\begin{aligned}
conj(A) &= \# \\
conj(B) &= \# \\
&\dots \\
conj(\perp) &= \# \\
conj(\top) &= \# \\
conj(F_1 \wedge F_2) &= conj(F_1) \ \&\& \ conj(F_2) \\
conj(F_1 \vee F_2) &= \# \#
\end{aligned}$$

Dimostrare, per induzione strutturale su  $F$ , che per ogni formula  $G$  e per ogni variabile  $V$ ,  $conj(F[G/V]) = \#$  sse

- $conj(F) = \#$  e
- $conj(G) = \#$  o  $V \notin FV(F)$

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

- (a) L'accordo sulla brexit non si farà o il backstop verrà rimosso
- (b) Il backstop non verrà rimosso in mancanza di allineamento tariffario
- (c) quindi se ci sarà un accordo sulla brexit allora ci sarà stato allineamento tariffario, contro il parere del governo.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Effettuare la seguente sostituzione minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$\left( \int_x^{z^2} (\Sigma_{j=x}^z j) dz \right) \{z + j/x\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$\exists x. \forall y. g(x) \leq f(y) \vdash \forall x. \exists y. y \leq f(g(x))$$