

# Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica  
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA  
28/05/2018

- 1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.
- 2 (5 punti). Considerare la seguente grammita per alberi binari:  $B ::= \epsilon \mid B * B$ . Scrivere, facendo ricorso alla sola ricorsione strutturale, la funzione  $s(B_1, B_2)$  che ritorna *true* sse  $B_2$  è un sottoalbero di  $B_1$ . È possibile fare ricorso a funzioni ausiliarie e usare parametri ulteriori.

Esempi:

- $s(((\epsilon * \epsilon) * \epsilon) * \epsilon, \epsilon * \epsilon) = \text{true}$
- $s(((\epsilon * \epsilon) * \epsilon) * \epsilon, \epsilon * (\epsilon * \epsilon)) = \text{false}$

- 3 (1 punto). Enunciare il teorema di invarianza per sostituzione.
- 4 (1 punto). Enunciare l'assioma di comprensione e dimostrare il paradosso di Russell.
- 5 (1 punto). Elencare le due leggi di De Morgan (una per i quantificatori, una per i connettivi) che sono valide classicamente ma non intuizionisticamente.
- 6 (1 punto). Definire le tautologie della logica proposizionale facendo riferimento alle tabelle di verità.
- 7 (8 punti). Si considerino le formule generate dalla grammatica

$$F ::= F \wedge F \mid \top \mid A \mid B \mid \dots$$

Definire, per ricorsione strutturale su  $F$ , la funzione  $occurs(A, F)$  che ritorna *true* sse la variabile  $A$  occorre come sottoformula di  $F$ . Dimostrare, per induzione strutturale su  $F$ , che

$$\forall A(occurs(A, F) = \text{true} \Rightarrow F \wedge \neg A \equiv \perp)$$

- 8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento: I Cinque Stelle si alleano con il PD oppure i Cinque Stelle si alleano con la Lega oppure i Cinque Stelle non governano. Se la Lega non rompe con FI allora i Cinque Stelle non si alleano con la Lega. Se il PD non governa allora i Cinque Stelle non si sono alleati con il PD. Quindi se i Cinque Stelle governano, ma il PD no, allora la Lega ha rotto con FI.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

- 9 (2 punti). Si calcoli il risultato della seguente sostituzione minimizzando il numero di cambi di nome di variabili.

$$((\forall u.z < u) \vee (\exists y.y < z))[(x + u + \sum_{y=0}^n y)/z]$$

- 10 (3 punti). Solo una delle due seguenti formule definisce correttamente la big-O notation  $f \in O(g)$ , mentre l'altra è una formula logicamente più debole.

(a)  $\exists m \exists c \forall n, n \geq m \Rightarrow f(n) \leq cg(n)$

(b)  $\exists m \forall n \exists c, n \geq m \Rightarrow f(n) \leq cg(n)$

Dimostrare in deduzione naturale al prim'ordine che la formula più forte implica la più debole. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile. Inoltre mostrare due funzioni  $f$  e  $g$  sui numeri naturali che soddisfino la formula più debole senza soddisfare quella più forte.