

Logica Matematica

Informatica – Filosofia

Simone Martini

Dipartimento di Scienze dell'Informazione

`martini@cs.unibo.it`

Newsgroups: `unibo.cs.informatica.logica`

Ricevimento studenti: Mercoledì 14-15



- Testo:
Asperti, Ciabattoni
Logica a informatica
McGraw-Hill Italia

- Collaboratore:
dott. Stefano Zacchioli



Cos'è la logica?

*Ars directiva ipsius actus rationis, per quam scilicet homo in ipso actu rationis **ordinate** et **faciliter** et **sine errore** procedat.*

[Tommaso d'Aquino, An. posteriora, I, 1]

*La parte della filosofia che studia quali sono le leggi del **pensare**, che assicurano ad esso validità conoscitiva.*

*Si chiama **logica formale** lo studio **in abstracto** dei procedimenti seguiti dal pensiero nella formazione dei concetti, dei giudizi, dei ragionamenti, indipendentemente dai contenuti cui esso si può volta a volta applicare.*

[Lamanna-Adorno, Diz. di termini filosofici, 1971]



Cos'è la logica?

- Riflessione razionale sulle strutture (soprattutto formali) del ragionamento
 - ▶ Fascinazione per la ragione
 - ▶ Consapevolezza di ragionamenti fallaci
 - ▶ Circoscrivere il corretto (e.g., la Scolastica)
 - ▶ Circoscrivere il dicibile (e.g., Wittgenstein)



Cos'è la logica *matematica*?

- Un settore della matematica che usa tecniche matematiche per indagare il ragionamento (matematico)
- In particolare i concetti di
 - ▶ Dimostrazione
 - ▶ Consistenza
 - ▶ Teoria
 - ▶ Veritàall'interno della conoscenza matematica.
- Uso di linguaggio **formale**



Perché logica matematica a informatica?

- Linguaggio formale
- Sintassi e semantica
- Verifica e correttezza di programmi
- IA
- ...



Informatica, figlia della logica



Argomentazioni

La logica studia le argomentazioni:

- Come passare da **premesse**
- a una **conclusione**

Ogni uomo è mortale. Ogni neonato è un uomo. Quindi ogni neonato è mortale.

Ci si sposa per interesse o per amore. La mia fidanzata è ricca di famiglia. Dunque mi sposa per amore.

Ma potrebbe sposarmi per un interesse diverso dai soldi. . .



Non argomentazioni

Vi sono persone oneste e persone disoneste. Alcune persone oneste sono anche generose. Purtroppo la mia ragazza non è tra queste.



Argomentazioni in forma diversa

La casa è vuota. Lorenzo è andato infatti in palestra.

La casa è vuota. Allora Lorenzo è andato in palestra.



Proposizioni

- Premesse e conclusioni di un'argomentazione devono essere frasi cui si possa assegnare un valore di verità:
 - ▶ Lorenzo è andato al cinema
 - ▶ I pinguini volano
 - ▶ Oggi c'è il sole
- Molte frasi *non* sono in questa categoria:
 - ▶ Dove è andato Lorenzo?
 - ▶ Basta!
 - ▶ Siate puntuali a lezione

Diciamo *proposizione (dichiarativa)* o *asserzione* una frase con valore di verità



Argomentazioni canoniche

- Alcune proposizioni (le **premesse**)
- sono portate a sostegno
- di una **conclusione** (un'altra proposizione)

Indicatori inferenziali:

- di **premessa**: infatti, poiché, dato che, supposto che, ...
- di **conclusione**: quindi, dunque, perciò, così, ne segue che, ...



Un esempio

È pressoché impossibile ottenere in laboratorio composti di oro e argo, tanto meno in natura, dato che è difficile far sì che l'argo reagisca con altri elementi, e visto che l'oro, a sua volta, forma pochi composti.

[Varzi et al., Logica, McGraw-Hill 2007]



Un esempio, 2

*È pressoché impossibile ottenere in laboratorio composti di oro e argo, tanto meno in natura, **dato che** è difficile far sì che l'argo reagisca con altri elementi, e **visto che** l'oro, a sua volta, forma pochi composti.*

Premesse:

- è difficile far sì che l'argo reagisca con altri elementi
- l'oro, a sua volta, forma pochi composti

Conclusione:

- È pressoché impossibile ottenere in laboratorio composti di oro e argo, tanto meno in natura



Un esempio senza indicatori inferenziali

Certi politici sono degli ipocriti. Dicono che per tenere sotto controllo il deficit pubblico dovremmo pagare più tasse, ma poi sprecano soldi per le loro campagne elettorali.

[Varzi et al., Logica, McGraw-Hill 2007]

Premesse:

- Certi politici dicono che per tenere sotto controllo il deficit pubblico dovremmo pagare più tasse
- Quegli stessi politici sprecano soldi per le loro campagne elettorali

Conclusione:

- Quei politici sono degli ipocriti



Cosa costituisce una buona argomentazione?

- Ogni uomo stolto è noioso
- Qualche chiaccherone non è noioso
- *dunque*: Qualche chiaccherone non è stolto

- È difficile far sì che l'argo reagisca con altri elementi
- l'oro, a sua volta, forma pochi composti
- *dunque*: è pressoché impossibile ottenere in laboratorio composti di oro e argo, tanto meno in natura

- **Alcuni uomini sono santi**
- I criminali sono uomini
- *dunque*: I criminali sono santi



Argomentazioni *formalmente* corrette

- La **struttura formale**
 - ▶ delle proposizioni (premesse, conclusione)
 - ▶ dell'argomentazione
- garantisce da sola
- che **se** le premesse sono vere, **allora** è vera la conclusione

- *Ogni uomo è mortale*
- *Ogni neonato è un uomo*
- **dunque:** *Ogni neonato è mortale*



Logica delle proposizioni e dei predicati

Un'argomentazione **proposizionale** corretta:

- Oggi è lunedì oppure oggi è martedì
- Oggi non è lunedì
- Dunque, oggi è martedì

Un'argomentazione **predicativa** corretta:

- Ogni uomo è mortale
- Socrate è un uomo
- Dunque, Socrate è mortale



Logica delle proposizioni

- Oggi è lunedì oppure oggi è martedì : P oppure Q
 - Oggi non è lunedì : $\text{non } P$
 - Dunque, oggi è martedì : $\text{allora } Q$
-
- Le argomentazioni dipendono solo da opportune combinazioni delle proposizioni che le costituiscono.
 - Tali combinazioni hanno un definito valore di verità in funzione del valore di verità dei loro componenti.



Logica dei predicati

- Ogni uomo è mortale : per ogni x per il quale si possa dire $U(x)$, si può dire anche $M(x)$
 - Socrate è un uomo : possiamo dire U su Socrate
 - Dunque, Socrate è mortale : dunque possiamo dire M su Socrate.
-
- Le argomentazioni dipendono da relazioni tra individui e proprietà (predicati)
 - nonché da opportune **quantificazioni**



Sintassi e Semantica

- Sintassi

- ▶ I simboli usati
- ▶ I modi di comporli in “frasi” sensate
- ▶ I modi di derivare frasi (conclusioni) da frasi (ipotesi)

- Semantica

- ▶ Gli oggetti che i simboli denotano
- ▶ I valori di verità che corrispondono alle frasi
- ▶ La relazione di conseguenza tra la verità di certe frasi (ipotesi) e la verità di altre frasi (conclusioni)



Linguaggio e Metalinguaggio

- Linguaggio

- ▶ Linguaggio (formale) del calcolo
- ▶ La sua sintassi e semantica
- ▶ Argomentazioni

- Metalinguaggio

- ▶ Linguaggio nel quale il calcolo è descritto
- ▶ In genere: linguaggio naturale
- ▶ Giudizi di correttezza di argomentazioni
- ▶ Meta-teoremi



Uso e menzione ovvero: *de re vs de dicto*

- Bologna ha 375 000 abitanti
- “Bologna” ha 7 caratteri

uso

menzione



I paradossi

Abbiamo sognato [il mondo] resistente, misterioso, visibile, ubiquo nello spazio e fermo nel tempo; ma abbiamo ammesso nella sua architettura tenui ed eterni interstizi di assurdità, per sapere che è finto.

[J. L. Borges, La perpetua corsa di Achille e la tartaruga]



Il mentitore

Cretenses semper mendaces.

[Ad Titum 1, 12]

- Epimenide di Creta: “[Tutti] i Cretesi sono bugiardi”
È un paradosso?
Basta che esista un cretese che dice la verità e la frase è falsa.
- Ebulide di Mileto: “Io sto mentendo in questo momento”
- O anche: “Questa frase è falsa”
- La chiave: autoriferimento



Forme argomentative proposizionali

- Le argomentazioni seguenti hanno la **stessa forma**:
 - ▶ Oggi è lunedì oppure oggi è martedì
 - ▶ Oggi non è lunedì
 - ▶ Dunque, oggi è martedì

 - ▶ La *Gioconda* è stata dipinta da Raffaello o da Michelangelo
 - ▶ Raffaello non l'ha dipinta
 - ▶ Dunque, l'ha dipinta Michelangelo

 - ▶ Lorenzo o è in palestra o in piscina
 - ▶ Lorenzo non è in palestra
 - ▶ Dunque, Lorenzo è in piscina
- Sillogismo disgiuntivo:
 - ▶ $P \vee Q$
 - ▶ Non si dà il caso che P
 - ▶ Dunque, Q



Forme argomentative proposizionali, 2

- Le argomentazioni seguenti hanno la **stessa forma**:
 - ▶ Se oggi è martedì, c'è lezione di logica
 - ▶ Oggi è martedì
 - ▶ Dunque, oggi c'è lezione di logica

 - ▶ Se un vino costa tanto, è buono
 - ▶ Questa bottiglia di vino costa una fortuna
 - ▶ Dunque, questo vino è buono

 - ▶ Se Lorenzo ha il giubbotto, allora andrà in moto
 - ▶ Lorenzo ha il giubbotto
 - ▶ Dunque, Lorenzo andrà in moto
- *Modus ponens*
 - ▶ Se P , allora Q
 - ▶ Si dà il caso che P
 - ▶ Dunque, Q



Forme argomentative proposizionali, 3

- Le argomentazioni seguenti hanno la *stessa forma*:
 - ▶ Se è iniziato il semestre, allora ci sono le lezioni
 - ▶ Ci sono le lezioni
 - ▶ Dunque, è iniziato il semestre

 - ▶ Se oggi c'è il sole, allora sei felice
 - ▶ Oggi sei felice
 - ▶ Dunque, oggi c'è il sole
- *Affermazione del conseguente*
 - ▶ Se P , allora Q
 - ▶ Si dà il caso che Q
 - ▶ Dunque, P



Forme argomentative valide e non valide

- Una forma argomentativa è valida se assicura della verità della conclusione, supposta la verità delle premesse
- Modus ponens e sillogismo disgiuntivo sono forme **valide**
- Affermazione del conseguente è una forma **non valida**:
 - ▶ Se oggi c'è il sole, allora sei felice
 - ▶ Oggi sei felice
 - ▶ Dunque, oggi c'è il sole

