

Tempo a disposizione: ore 2:00.

Si scriva in *calligrafia* (dal greco: kalos=bello e graphe=scrittura) o il compito non sarà valutato. Scrivere la soluzione degli esercizi (1, 3) e (2,4) su fogli distinti.

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che la formula seguente è valida:

$$\forall z[(\neg A(z) \vee B(z)) \rightarrow (A(z) \rightarrow B(z))]$$

**Soluzione**

$$\frac{\frac{\frac{[\neg A(z)]^1 \quad [A(z)]^2}{\perp} \neg\mathcal{E}}{[\neg A(z) \vee B(z)]^3} \perp\mathcal{E} \quad \frac{[B(z)]^1}{B(z)} \perp\mathcal{E}}{\frac{B(z)}{A(z) \rightarrow B(z)} \rightarrow\mathcal{I} : 2} \vee\mathcal{E} : 1}{\frac{(\neg A(z) \vee B(z)) \rightarrow (A(z) \rightarrow B(z))}{\forall z[(\neg A(z) \vee B(z)) \rightarrow (A(z) \rightarrow B(z))]} \rightarrow\mathcal{I} : 3} \forall\mathcal{I}$$

2. Si dimostri per risoluzione che

$$\forall x \exists z \forall y [(B(z) \rightarrow A(y)) \wedge (C(z) \rightarrow D(x)) \wedge B(z) \wedge \neg D(z)] \models \exists x (A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg D(x))$$

**Soluzione** Se trasformiamo in una forma di Skolem la premessa, otteniamo prima

$$\forall x \exists z \forall y [(\neg B(z) \vee A(y)) \wedge (\neg C(z) \vee D(x)) \wedge B(z) \wedge \neg D(z)].$$

Eliminiamo ora il quantificatore esistenziale, sostituendo la variabile  $z$  con  $\mathbf{f}(x)$ , ottenendo

$$\forall x \forall y [(\neg B(\mathbf{f}(x)) \vee A(y)) \wedge (\neg C(\mathbf{f}(x)) \vee D(x)) \wedge B(\mathbf{f}(x)) \wedge \neg D(\mathbf{f}(x))],$$

ovvero, le clausole:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\neg B(\mathbf{f}(x)), A(y)\} \\ C_2 &= \{\neg C(\mathbf{f}(x)), D(x)\} \\ C_3 &= \{B(\mathbf{f}(x))\} \\ C_4 &= \{\neg D(\mathbf{f}(x))\}. \end{aligned}$$

Negando infine la formula a destra di  $\models$ , e ridenominando le variabili legate, si ottiene la clausola

$$C_5 = \{\neg A(z), \neg B(z), C(z), D(z)\}.$$

La procedura di risoluzione procede ora senza grandi problemi; per condurla in porto con precisione, tuttavia, occorre osservare che, nonostante le clausole da  $C_1$  a  $C_4$  condividano tutte la stessa variabile  $x$ , tale condivisione è solo apparente: ogni volta che si applica un passo di risoluzione, le due clausole che intervengono devono essere ridenominate (con variabili “*fresche*”) in modo da avere sempre variabili disgiunte.

$$\begin{array}{ll} C_6 & \text{Ris}(1, 5)\{y/z\} & \{\neg B(\mathbf{f}(x)), \neg B(y), C(y), D(y)\} \\ C_7 & \text{Ris}(6, 3\{z/x\})\{z/x, \mathbf{f}(z)/y\} & \{C(\mathbf{f}(z)), D(\mathbf{f}(z))\} \\ C_8 & \text{Ris}(7, 2)\{z/x\} & \{D(z), D(\mathbf{f}(z))\} \\ C_9 & \text{Ris}(8, 4)\{z/x\} & \{D(z)\} \\ C_{10} & \text{Ris}(9, 4)\{\mathbf{f}(x)/z\} & \text{VOID}. \end{array}$$

Nella riga relativa alla clausola  $C_7$ , si è indicato con  $\text{Ris}(6, 3\{z/x\})$  l'applicazione della risoluzione tra  $C_6$  e  $C_3$ , dopo che in quest'ultima la  $x$  è stata ridenominata in  $z$ , per evitare conflitto con la  $x$  della clausola  $C_6$ <sup>1</sup>. Si osservi, infine, che la clausola vuota *non* poteva essere ottenuta direttamente dalla  $C_8$  e dalla  $C_4$  cancellando “in un colpo solo” i due letterali positivi  $D(\dots)$ : non esiste infatti nessuna sostituzione che permetta di unificare simultaneamente  $D(z)$ ,  $D(\mathbf{f}(z))$  e  $D(\mathbf{f}(x))$ .

<sup>1</sup>L'applicazione — *erronea* — della risoluzione senza ridenominazione, in questo caso non portava a problemi significativi:  $\text{Ris}(6, 3)\{\mathbf{f}(x)/y\}$  dava la clausola  $\{C(\mathbf{f}(x)), D(\mathbf{f}(x))\}$ , che a meno di ridenominazione è proprio  $C_7$ . Si vuole però qui richiamare l'attenzione sul fatto che, in generale, la ridenominazione si deve sempre effettuare quando vi sono variabili in comune.

3. Determinare una forma di Skolem per la formula:

$$[(\exists x\forall yB(x, y)) \rightarrow (\forall z\exists yB(y, z))] \rightarrow \exists z\forall wA(w, z)$$

**Soluzione** Routine.

4. La formula seguente è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria?

$$P = [\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)] \rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$$

Se  $P$  è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula  $\neg P$ . Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui  $P$  è vera che una in cui  $P$  è falsa.

**Soluzione** La formula  $P$  è soddisfacibile e non valida. In ogni interpretazione in cui sia  $A$  che  $B$  siano sempre veri,  $P$  è vera. Al contrario  $P$  è falsa nell'interpretazione  $\mathcal{E} = \langle D, \emptyset, \{A^{\mathcal{E}}, B^{\mathcal{E}}\} \rangle$ , dove  $D = \{0, 1\}$  e  $A^{\mathcal{E}}$  vale sia su 0 che su 1, mentre  $B^{\mathcal{E}}$  vale su 1 ma non su 0.