Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 3 settembre 2003

Tempo a disposizione: ore 2:00.
Si scriva in *calligrafia* (dal greco: kalos=bello e graphe=scrittura) o il compito non sarà valutato.

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che la formula seguente è valida:

$$[\forall x \forall y A(x,y)] \to [\neg \forall x \neg A(x,x)].$$

Soluzione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x \forall y A(x,y)]^2}{\forall y A(x,y)}\ \forall\mathcal{E}}{A(x,x)}\ \forall\mathcal{E} \qquad \dfrac{[\forall x \neg A(x,x)]^1}{\neg A(x,x)}\ \forall\mathcal{E}}{\perp}\ \neg\mathcal{E}}{\neg\forall\neg A(x,x)}\ \neg\mathcal{I}:1}{(\forall x \forall y A(x,y)) \to (\neg \forall x \neg A(x,x))}\ \to\mathcal{I}:2$$

2. Si dimostri per risoluzione che

$$\forall x(A(x) \to C(x)) \wedge \forall x(B(x) \to C(\mathbf{f}(x))) \wedge \exists x(A(x) \vee B(x)) \models \exists x C(x).$$

Soluzione Per le note proprietà della conseguenza logica, la tesi è equivalente a

$$\forall x(A(x) \to C(x)), \forall x(B(x) \to C(\mathbf{f}(x))), \exists x(A(x) \vee B(x)) \models \exists x C(x).$$

Applicando le trasformazioni canoniche alle formule di sinistra e ridenominando le variabili, si ottengono le formule in forma prenessa e con matrice in forma congiuntiva:

$$\forall x(\neg A(x) \vee C(x)), \forall y(\neg B(y) \vee C(\mathbf{f}(y))), \exists z(A(z) \vee B(z)),$$

da cui, eliminando il quantificatore esistenziale con l'introduzione di una nuova constante $\mathbf{c}$ al posto della variabile z, si ottengono le clausole:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\neg A(x), C(x)\} \\ C_2 &= \{\neg B(y), C(\mathbf{f}(y))\} \\ C_3 &= \{A(\mathbf{c}), B(\mathbf{c})\} \end{aligned}$$

Negando la formula a destra di $\models$ e ridenonimando la variabile si ottiene poi la formula $\forall w \neg C(w)$, da cui la clausola

$$C_4 = \{\neg C(w)\}.$$

La derivazione può procedere ora come segue:

$$\begin{array}{lll} C_5 & \mathsf{Ris}(1,4)\{x/w\} & \{A(x)\} \\ C_6 & \mathsf{Ris}(5,3)\{\mathbf{c}/x\} & \{B(\mathbf{c})\} \\ C_7 & \mathsf{Ris}(6,2)\{\mathbf{c}/y\} & \{C(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\} \\ C_8 & \mathsf{Ris}(7,4)\{\mathbf{f}(\mathbf{c})/w\} & VOID \end{array}$$

3. Determinare una forma di Skolem per la formula:

$$[(\forall x \forall y A(x,y)) \to (\forall z \exists y A(y,z))] \wedge \forall z \exists w B(w,z)$$

Soluzione: Il procedimento è puramente meccanico; applicando le note trasformazioni:

$$\begin{array}{rl} & (\forall x \forall y A(x,y)) \to (\forall z \exists y A(y,z))] \wedge \forall z \exists w B(w,z) \\ \equiv & [\exists x \exists y (A(x,y) \to (\forall z \exists u A(u,z))] \wedge \forall v \exists w B(w,v) \\ \equiv & [\exists x \exists y \forall z \exists u (A(x,y) \to A(u,z))] \wedge \forall v \exists w B(w,v) \\ \equiv & \exists x \exists y \forall z \exists u \forall v \exists w[(A(x,y) \to A(u,z)) \wedge B(w,v)] \\ \equiv & \exists x \exists y \forall z \exists u \forall v \exists w[(\neg A(x,y) \vee A(u,z)) \wedge B(w,v)] \end{array}$$

Eliminiamo ora i quantificatori esistenziali, sostituendo:

$$\begin{array}{ccl} x & \text{con} & \mathbf{c} \\ y & \text{con} & \mathbf{d} \\ u & \text{con} & \mathbf{f}(z) \\ w & \text{con} & \mathbf{g}(z,v), \end{array}$$

ottenendo:

$$\forall z \forall v[(\neg A(\mathbf{c},\mathbf{d}) \vee A(\mathbf{f}(z),z)) \wedge B(\mathbf{g}(z,v),v)]$$

4. La formula seguente è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria?

$$P = [\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)] \rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))$$

Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione P è soddisfacibile ma non valida. Sul dominio $D = \{0, 1\}$ possiamo costruire, per esempio, l'interpretazione $\mathcal{E} =< D, \emptyset, \{A^{\mathcal{E}}, B^{\mathcal{E}}\} >$, interpretando entrambi i predicati $A^{\mathcal{E}}$ e $B^{\mathcal{E}}$ come veri su 0 e falsi su 1. In $\mathcal{E}$ la formula P è vera. Sempre su D possiamo costruire l'interpretazione $\mathcal{F} =< D, \emptyset, \{A^{\mathcal{F}}, B^{\mathcal{F}}\} >$, dove $A^{\mathcal{F}}$ vale su 0 ma non su 1, e $B^{\mathcal{F}}$ vale su 1 ma non su 0: in $\mathcal{F}$, P è falsa.