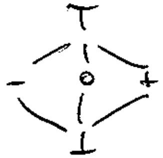
SEMANTICA ASTRATTA DELLE VARIABILI

Sia $(A, \le)$ il dominio (astratto) dei segni



e sia $State^A \stackrel{def}{=} Var \to A$, con relazione d'ordine $\le_S^A$ definita come segue $s_1^A \le_S^A s_2^A \stackrel{def}{\iff} \forall x \in Var : s_1^A(x) \le s_2^A(x)$. $State \underset{\gamma_{State}}{\overset{\alpha_{State}}{\rightleftarrows}} State^A$ è una inserzione di Galois. ESERCIZIO: DEFINIRLA E DIMOSTRARLA.

Ora si considerino i domini $(State \to \wp(\mathbb{Z}), \le_\to)$ e $(State^A \to A, \le^A_\to)$ dove $State \to \wp(\mathbb{Z})$ e $State^A \to A$ però insiemi di funzioni monotone.

Esiste una inserzione di Galois:

$$\begin{array}{c} State \to \wp(\mathbb{Z}) \\ \alpha_\to \downarrow \; \uparrow \gamma_\to \\ State^A \to A \end{array}$$

che soddisfa le proprietà:

$$\gamma_\to : f^A \mapsto lub\{ f \mid \alpha_\to(f) \le^A_\to f \}$$

$$\alpha_\to : f \mapsto glb\{ f^A \mid f \le_\to \gamma_\to(f^A) \}$$

e definita da

$$\gamma_\to : f^A \mapsto [\, s \mapsto \gamma(f^A(\alpha_{State}(s))) \,]$$

$$\alpha_\to : f \mapsto [\, s^A \mapsto \alpha(f(\gamma_{State}(s^A))) \,]$$

dove γ e α sono le astrazione e concretizzazione tra $\wp(\mathbb{Z})$ e A.

OSSERVAZIONE: Condizione necessaria è che $\gamma_\to$ e $\alpha_\to$ siano monotone è che sia f^* che f siano monotone

<u>TEOREMA</u> [CORRETTEZZA DI $\mathcal{A}^\sharp$ RISPETTO $\mathcal{A}$] Per ogni $e \in AExp$

$$\mathcal{A}[\![e]\!] \leq_{\to} \gamma_{\to}(\mathcal{A}^\sharp[\![e]\!])$$

Prova. Per definizione di $\leq_\to$ e $\gamma_\to$ possiamo vedere e dimostrare che

$$\forall s \in State: \quad \mathcal{A}[\![e]\!](s) \subseteq \gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![e]\!](\alpha_{state}(s)))$$

per induzione sulla struttura di e.

<u>Caso di base</u> $\boxed{e = n}$: $\mathcal{A}[\![n]\!](s) = \{n\}$, mentre $\gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![n]\!](\alpha_{state}(s))) = \gamma(\alpha(\{n\}))$

e per definizione di connessione di Galois: $\mathcal{A}[\![n]\!](s) \subseteq \gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![n]\!](\alpha_{state}(s)))$.

$\boxed{e = x}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![x]\!](s) &= s(x) \\
&\subseteq \gamma(\alpha(s(x))) && \text{per definizione di connessione di Galois} \\
&= \gamma(\alpha_{state}(s)(x)) && \text{per definizione di } \alpha_{state} \\
&= \gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![x]\!](\alpha_{state}(s))) && \text{per definizione di } \mathcal{A}^\sharp
\end{aligned}$$

<u>Caso induttivo</u> $\boxed{e = e' \text{ op } e''}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![e' \text{ op } e'']\!](s) &= \mathcal{A}[\![e']\!](s) \ \underline{op}\ \mathcal{A}[\![e'']\!](s) && \text{per definizione di } \mathcal{A} \\
&\subseteq \gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![e']\!](\alpha_{state}(s))) \ \underline{op}\ \gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![e'']\!](\alpha_{state}(s))) && \text{per ipotesi induttiva e monotonia di } \underline{op} \\
&\subseteq \gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![e']\!](\alpha_{state}(s)) \ \text{op}^\sharp\ \mathcal{A}^\sharp[\![e'']\!](\alpha_{state}(s))) && \text{per correttezza locale di op}^\sharp \\
&= \gamma(\mathcal{A}^\sharp[\![e' \text{ op } e'']\!](\alpha_{state}(s))) && \text{per definizione di } \mathcal{A}^\sharp.
\end{aligned}$$

LA SEMANTICA ASTRATTA DELLE ESPRESSIONI BOOLEANE

Sia BExp la categoria sintattica delle espressioni booleane rappresentate da $b, b', \ldots$.
La sintassi è definita dalle regole

$$b, b' ::= \text{true} \mid \text{false} \mid a = a' \mid a \leq a' \mid \neg b \mid b \wedge b'$$

e la semantica concreta (vedi [1], pp 5-17) è definita dalla funzione $\mathcal{B} : \text{BExp} \to (\text{State} \to \mathbb{T})$ per induzione sulla sintassi come segue

$$\mathcal{B}[\![\text{true}]\!](s) = tt$$

$$\mathcal{B}[\![\text{false}]\!](s) = ff$$

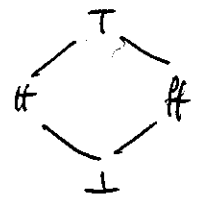
$$\mathcal{B}[\![a = a']\!](s) = \mathcal{A}[\![a]\!](s) \mathrel{\dot{=}} \mathcal{A}[\![a']\!](s)$$

$$\mathcal{B}[\![a \leq a']\!](s) = \mathcal{A}[\![a]\!](s) \mathrel{\dot{\leq}} \mathcal{A}[\![a']\!](s)$$

$$\mathcal{B}[\![\neg b]\!](s) = \dot{\neg}\, \mathcal{B}[\![b]\!](s)$$

$$\mathcal{B}[\![b \wedge b']\!](s) = \mathcal{B}[\![b]\!] \mathrel{\mathring{\wedge}} \mathcal{B}[\![b']\!](s)$$

<u>OSSERVAZIONE</u>: Il dominio $(\Pi, \le_\Pi)$ è il reticolo, dove $\perp$ è la non definizione e $\top$ rappresenta il fatto che non conosco il valore di una espressione booleana



<u>SI PUÒ DIMOSTRARE</u> che $\top$ non è immagine di alcuna espressione (booleana) e di alcuno stato.

<u>OSSERVAZIONE</u>: $\dot{=}$, $\dot{\le}$, $\dot{\neg}$, $\dot{\wedge}$ sono i corrispondenti semantici delle operazioni sintattiche $=$, $\le$, $\neg$, $\wedge$, rispettivamente.

<u>Attenzione</u>: poiché $\mathcal{A} : AExp \to (State \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$, occorre definire $\dot{=}$ e $\dot{\le}$ su $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$:

$$X \dot{=} Y \stackrel{def}{=} \begin{cases} \perp & \text{se } X = \emptyset \text{ or } Y = \emptyset \\ tt & \text{se } X = \{c\} = Y \\ ff & \text{se } X \cap Y = \emptyset \\ \top & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$X \dot{\le} Y \stackrel{def}{=} \begin{cases} \perp & \text{se } X = \emptyset \text{ or } Y = \emptyset \\ tt & \text{se, per ogni } x \in X \text{, per ogni } y \in Y : x \le y \text{ [gli elementi di } X \text{ sono più piccoli di ogni elemento di } Y] \\ ff & \text{se per ogni } x \in X \text{, per ogni } y \in Y : x > y \\ \top & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Stessa cosa per $\dot{\neg}$ e $\dot{\wedge}$:

$\dot{\neg}$	$\perp$	tt	ff	$\top$
	$\perp$	ff	tt	$\top$

$\dot{\wedge}$	$\perp$	tt	ff	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
tt	$\perp$	tt	ff	$\top$
ff	$\perp$	ff	ff	ff
$\top$	$\perp$	$\top$	ff	$\top$

La semantica astratta $\mathcal{B}^A : BExp \to (State^A \to \mathbb{T})$ è definita come segue [il dominio $\mathbb{T}$ è lo stesso della semantica concreta!]

$$\mathcal{B}^A[\![\mathrm{true}]\!](s^A) = tt$$

$$\mathcal{B}^A[\![\mathrm{false}]\!](s^A) = ff$$

$$\mathcal{B}^A[\![e = e']\!](s^A) = \mathcal{A}^A[\![e]\!](s^A) =^A \mathcal{A}^A[\![e']\!](s^A)$$

$$\mathcal{B}^A[\![e \leq e']\!](s^A) = \mathcal{A}^A[\![e]\!](s^A) \leq^A \mathcal{A}^A[\![e']\!](s^A)$$

$$\mathcal{B}^A[\![\neg b]\!](s^A) = \neg^A \mathcal{B}^A[\![b]\!](s^A)$$

$$\mathcal{B}^A[\![b \wedge b']\!](s^A) = \mathcal{B}^A[\![b]\!](s^A) \wedge^A \mathcal{B}^A[\![b']\!](s^A)$$

dove, poiché $\mathbb{T}$ è lo stesso, $\neg^A \stackrel{def}{=} \dot{\neg}$ e $\wedge^A \stackrel{def}{=} \dot{\wedge}$

Dobbiamo solamente definire le operazioni $=^A$ e $\leq^A$ sul dominio $A = (\{\bot, -, 0, +, \top\}, \leq)$.

$=^A$	$\bot$	$-$	0	$+$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$-$	$\bot$	$\top$	ff	ff	$\top$
0	$\bot$	ff	tt	ff	$\top$
$+$	$\bot$	ff	ff	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

$\leq^A$	② $\bot$	$-$	0	$+$	$\top$
① $\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$-$	$\bot$	$\top$	tt	tt	$\top$
0	$\bot$	ff	tt	tt	$\top$
$+$	$\bot$	ff	ff	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

$=^A$ e $\leq^A$ sono <u>monotone</u>. Occorre dimostrarne la loro <u>correttezza locale</u> per la correttezza di $\mathcal{B}^A$ rispetto a $\mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE: [Correttezza locale di $=^A$ e $\leq^A$] Per ogni $d, d' \in A$:

$$\gamma(d) \doteq \gamma(d') \sqsubseteq_{\mathbb{T}} id(d =^A d')$$

$$\gamma(d) \dot{\leq} \gamma(d') \sqsubseteq_{\mathbb{T}} id(d \leq^A d')$$

dove id è l'identità (vedi disegno accanto)

$$\begin{tikzcd}
(\wp(\mathbb{Z}), \subseteq) \times (\wp(\mathbb{Z}), \subseteq) \arrow[dr, "\doteq"] & \\
& (\mathbb{T}, \sqsubseteq_{\mathbb{T}}) \\
(A, \sqsubseteq) \times (A, \sqsubseteq) \arrow[uu, "\gamma"] \arrow[ur, "=^A"'] &
\end{tikzcd}$$

Prova: la dimostrazione si svolge per casi:

$\doteq / =^A$	$\bot$	$-$	0	$+$	$\top$
$\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$
$-$	$\bot$ / $\bot$	$\top$ / $\top$	ff / ff	ff / ff	$\top$ / $\top$
0	$\bot$ / $\bot$	ff / ff	tt / tt	ff / ff	$\top$ / $\top$
$+$	$\bot$ / $\bot$	ff / ff	ff / ff	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$
$\top$	$\bot$ / $\bot$	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$

$\dot{\leq} / \leq^A$	$\bot$	$-$	0	$+$	$\top$
$\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$	$\bot$ / $\bot$
$-$	$\bot$ / $\bot$	$\top$ / $\top$	tt / tt	tt / tt	$\top$ / $\top$
0	$\bot$ / $\bot$	tt / ff	tt / tt	tt / tt	$\top$ / $\top$
$+$	$\bot$ / $\bot$	ff / ff	ff / ff	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$
$\top$	$\bot$ / $\bot$	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$	$\top$ / $\top$

OSSERVAZIONE: Esiste una inserzione di Galois: $\langle State \to \mathbb{T}, State^A \to \mathbb{T}, \gamma_{\to}^{\mathbb{T}}, \alpha_{\to}^{\mathbb{T}} \rangle$

dove

$$\gamma_{\to}^{\mathbb{T}} : p^A \longrightarrow [s \longmapsto p^A(\alpha_{State}(s))]$$

$$\alpha_{\to}^{\mathbb{T}} : p \longrightarrow [s^A \longmapsto p(\gamma_{State}(s^A))]$$

(il $\gamma_{\mathbb{T}}$ e $\alpha_{\mathbb{T}}$ sono le identità)

LA SEMANTICA ASTRATTA DEI COMANDI

Iniziamo con un sottoinsieme della categoria sintattica Stm:

$$S ::= \mathrm{skip} \mid x := e \mid S ; S$$

[condizionale e iterazione saranno trattati in seguito].

La semantica concreta $\mathcal{S} : \mathrm{Stm} \to (\mathrm{State} \hookrightarrow \mathrm{State})$ è definita da

$$\mathcal{S}[\![\mathrm{skip}]\!] = \mathrm{id}$$

$$\mathcal{S}[\![x := e]\!] = s \longmapsto s[x \mapsto \mathcal{A}[\![e]\!](s)]$$

$$\mathcal{S}[\![S ; S']\!] = \mathcal{S}[\![S']\!] \circ \mathcal{S}[\![S]\!]$$

Bisogna osservare che nel nostro caso

$$\mathrm{State} = \mathrm{Var} \longrightarrow \wp(\mathbb{Z})$$

e con l'introduzione delle variabili, se lo stato associa a una variabile un insieme non-vuoto e non-singoletto allora $\mathcal{A}$ può produrre insiemi non vuoti e non singoletti. Ad esempio

$$\mathcal{A}[\![x]\!]([x \mapsto \{1,2\}]) = \{1, 2\}.$$

Occorre anche analizzare il calcolo completo $\mathrm{State} \hookrightarrow \mathrm{State}$

Sia $s \leq_s s' \overset{def}{=} \forall x: s(x) \subseteq s'(x)$. Quindi siano $f, g \in State \hookrightarrow State$

$f \sqsubseteq_{\hookrightarrow} g \overset{def}{=} \forall s \in dom(f): f(s) \leq_s g(s)$

<u>Osservazione</u>: il minimo di $State \hookrightarrow State$ è $\emptyset$; il massimo T è la funzione tale che $T(s)(x) = \mathbb{Z}$.

La semantica astratta $S^A : Stm \to (State^A \hookrightarrow State^A)$ è definita da

$$S^A[\![skip]\!] = id$$

$$S^A[\![x := e]\!] = s \mapsto s[x \mapsto \mathcal{A}[\![e]\!](s)]$$

$$S^A[\![S ; S']\!] = S^A[\![S']\!] \circ S^A[\![S]\!]$$

Per quanto riguarda l'ordinamento del reticolo $State^A \hookrightarrow State^A$

si ha $s_1^A \leq_s^A s_2^A \overset{def}{=} \forall x .\ s_1^A(x) \leq s_2^A(x)$ e siano $f^A, g^A \in State^A \hookrightarrow State^A$

$f^A \leq^A_{\hookrightarrow} g^A \overset{def}{=} \forall s^A \in dom(f^A): f^A(s^A) \leq_s^A g^A(s^A)$.

Prima la correttezza di S^A rispetto S occorre definire $\gamma_{\hookrightarrow}: (State^A \hookrightarrow State^A) \to (State \hookrightarrow State)$

e $\gamma_{State}: State^A \to State$ [PER QUEST'ULTIMA VEDI ESERCIZIO PG. 23]

$\gamma_{State}(s^A) := x \mapsto \gamma(s^A(x))$ [la funzione γ è quella nota]

$$\gamma_{\hookrightarrow} = \begin{cases} f^A \mapsto [s \mapsto \gamma_{State}(f^A(\alpha_{State}(s)))] & \text{quando } f^A(\alpha_{State}(s)) \text{ è definito} \\ f^A \mapsto [s \mapsto undefined] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È possibile anche definire una estensione $\alpha_{\hookrightarrow}$:

$$\alpha_{\hookrightarrow} = f \mapsto \left[s^A \longmapsto \alpha_{state}\left(f\left(\gamma_{state}(s^A) \right) \right) \right]$$ quando $f(\gamma_{state}(s^A))$ è definito

<u>Esercizio</u>: dimostrare che $\langle State \hookrightarrow State,\ State^A \hookrightarrow State^A,\ \gamma_{\hookrightarrow},\ \alpha_{\hookrightarrow} \rangle$ è una inserzione di Galois.

<u>Teorema</u> [Correttezza di $\mathcal{S}^*$ rispetto a $\mathcal{S}$]: per ogni S: $\mathcal{S}[\![S]\!] \leq_{\hookrightarrow} \gamma_{\hookrightarrow}\left(\mathcal{S}^A[\![S]\!]\right)$

<u>Prova</u>: per definizione di $\leq_{\hookrightarrow}$ e $\gamma_{\hookrightarrow}$, è equivalente dimostrare che, per ogni $s \in State$:

$$\mathcal{S}[\![S]\!](s) \leq_s \gamma_{state}\left(\mathcal{S}^A[\![S]\!](\alpha_{state}(s))\right)$$

per induzione sulla struttura sintattica di S:

<u>caso di base</u>: $\boxed{S = skip}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[\![skip]\!](s) &= s && \text{per definizione di } \mathcal{S}\\
&\leq \gamma_{state}(\alpha_{state}(s)) && \text{per definizione di connessione di Galois}\\
&= \gamma_{state}\left(\mathcal{S}^*[\![skip]\!](\alpha_{state}(s))\right) && \text{per definizione di } \mathcal{S}^*
\end{aligned}$$

$\boxed{S = x := e}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[\![x := e]\!](s) &= s[x \mapsto \mathcal{A}[\![e]\!](s)] && \text{per definizione di } \mathcal{S}\\
&\leq_s s[x \mapsto \gamma(\mathcal{A}^A[\![a]\!](\alpha_{state}(s)))] && \text{per ipotesi induttiva su } \mathcal{A} \text{ (vedi pg. 24)}\\
&\leq_{\hookrightarrow} \gamma_{state}\left(\alpha_{state}(s)[x \mapsto \mathcal{A}^A[\![e]\!](\alpha_{state}(s))]\right) && \text{per definizione di } \leq_{\hookrightarrow} \text{ e } \gamma_{state}\\
&= \gamma_{state}\left(\mathcal{A}^A[\![x := e]\!](\alpha_{state}(s))\right) && \text{per definizione di } \mathcal{A}^*.
\end{aligned}$$

<u>caso induttivo</u>: $\boxed{S \equiv S';S''}$ per ipotesi induttiva e definizione di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^*$.

IL COMANDO CONDIZIONALE

Sia $cond : ((State \to \mathbb{T}) \times (State \hookrightarrow State) \times (State \hookrightarrow State)) \to (State \hookrightarrow State)$

la funzione definita da

$$cond(p, f, g)(s) = \begin{cases} f(s) & \text{se } p(s) = tt \\ g(s) & \text{se } p(s) = ff \\ f(s) \sqcup g(s) & \text{se } p(s) = \top \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>: rispetto a [1], pg 87, qui c'è la definizione di cond anche quando $p(s) = \top$. La funzione cond <u>non è definita</u> se $p(s) = \bot$.

<u>PROPOSIZIONE</u>: cond è un operatore continuo [vedi Esercizio 4.44 di [1]).

Il comando condizionale è sintatticamente definito dalle regole

$$S ::= \text{if } b \text{ then } S \text{ else } S$$

dove $b \in BExp$. Mentre la regola semantica del condizionale è:

$$\mathcal{S}[\![\text{if } b \text{ then } S \text{ else } S']\!] = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}[\![S]\!], \mathcal{S}[\![S']\!])$$

Per definire la semantica astratta occorre una variante astratta di cond:

$$cond^* : ((State^* \to \mathbb{T}) \times (State^* \hookrightarrow State^*) \times (State^* \hookrightarrow State^*)) \to (State^* \hookrightarrow State^*)$$

definita esattamente come cond, con p, f, g dei tipi astratti corrispondenti.

Proposizione: $cond(p,f,g) \preceq_{\hookrightarrow} \gamma_{\hookrightarrow}(cond^A(\alpha^{\Pi}_{\rightarrow}(p), \alpha_{\hookrightarrow}(f), \alpha_{\hookrightarrow}(g)))$ [CORRETTEZZA LOCALE DI $cond^A$]

Prova: per definizione, abbiamo provare che, per ogni $s \in State$; se $cond(p,f,g)(s)$ è definita allora

$$cond(p,f,g)(s) \leq_{State} \gamma_{State}\left(cond^A(\alpha^{\Pi}_{\rightarrow}(p), \alpha_{\hookrightarrow}(f), \alpha_{\hookrightarrow}(g))(\alpha_{State}(s))\right)$$

A questo punto ragioniamo per casi sui possibili risultati di cond:

- $p(s) = \perp$: cond è indefinita

- $p(s) = tt$: $cond(p,f,g)(s) = f(s)$

$$\leq_{State} \gamma_{\hookrightarrow}(\alpha_{\hookrightarrow}(f))(s) \quad \text{perché è una connessione di Galois}$$

$$= \gamma_{State}(\alpha_{\hookrightarrow}(f)(\alpha_{State}(s))) \quad \text{per definizione di } \gamma_{\hookrightarrow}$$

$$\leq_{State} \gamma_{State}\left(cond^A(\alpha^{\Pi}_{\rightarrow}(p), \alpha_{\hookrightarrow}(f), \alpha_{\hookrightarrow}(g))(\alpha_{State}(s))\right)$$

perché $tt = p(s)$

$$\leq_{\Pi} \gamma^{\Pi}_{\rightarrow}(\alpha^{\Pi}_{\rightarrow}(p))(s)$$

$$= \alpha^{\Pi}_{\rightarrow}(p)(\alpha_{State}(s))$$

- $p(s) = ff$: simile al caso precedente.

Come immediata conseguenza della Proposizione di sopra otteniamo:

Lemma: $S[\![\text{if } b \text{ then } S \text{ else } S']\!] \leq_{\hookrightarrow} \gamma_{\hookrightarrow}(S^A[\![\text{if } b \text{ then } S \text{ else } S']\!])$.

Il comando iterativo

La semantica concreta del comando iterativo while b do S è

$$\mathcal{S}[\![\text{while } b \text{ do } S]\!] = Fix(F) \quad \text{dove} \quad F(g) = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}[\![S]\!], id)$$

e dove $Fix(F) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\bot)$.

In maniera corrispondente, la semantica astratta è

$$\mathcal{S}^A[\![\text{while } b \text{ do } S]\!] = Fix(F_A) \quad \text{dove} \quad F_A(g^*) = cond^*(\mathcal{B}^A[\![b]\!], g^* \circ \mathcal{S}^A[\![S]\!], id^A)$$

Al fine della correttezza della semantica astratta occorre dimostrare

$$\mathcal{S}[\![\text{while } b \text{ do } S]\!] \leq_C \gamma_C(\mathcal{S}^*[\![\text{while } b \text{ do } S]\!])$$

Per come sono definiti F e F_A e Fix, è sufficiente dimostrare che, per ogni n:

$$F^n(\bot) \leq_C \gamma_C(F_A^n(\bot))$$

La prova è per induzione sulla struttura di S e sul naturale n (doppia induzione)

Nel caso base $F^0(\bot) = \bot \leq_C \gamma_C(F_A^n(\bot))$, qualunque sia $\gamma_C(F_A^n(\bot))$.

Caso induttivo: $F^{n+1}(\bot) = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], F^n(\bot) \circ \mathcal{S}[\![S]\!], id)$

$\leq_C cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \gamma_C(F_A^n(\bot)) \circ \mathcal{S}[\![S]\!], \gamma_C(id^A))$ per ipotesi induttiva e monotonia di cond

$\leq_C cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \gamma_C(F_A^n(\bot)) \circ \gamma_C(\mathcal{S}^A[\![S]\!]), \gamma_C(id^A))$

per ipotesi induttiva su f^A e f

$$= \mathrm{cond}\left(\mathcal{B}[\![b]\!],\ \gamma_{\hookrightarrow}\left(F_A^n(\perp) \circ f^A[\![S]\!]\right),\ \gamma_{\hookrightarrow}(id^A)\right)$$

$$\leq_{\hookrightarrow} \mathrm{cond}\left(\gamma_{\hookrightarrow}^{2^{\pi}}\left(\mathcal{B}^A[\![b]\!]\right),\ \gamma_{\hookrightarrow}\left(F_A^n(\perp) \circ f^A[\![S]\!]\right),\ \gamma_{\hookrightarrow}(id^A)\right)$$ per ipotesi induttiva su $\mathcal{B}^A$ e $\mathcal{B}$

$$\leq_{\hookrightarrow} \gamma_{\hookrightarrow}\left(\mathrm{cond}^A\left(\alpha_{\hookrightarrow}^{\pi}\left(\gamma_{\hookrightarrow}^{\pi}\left(\mathcal{B}^A[\![b]\!]\right)\right),\ \alpha_{\hookrightarrow}\left(\gamma_{\hookrightarrow}\left(F_A^n(\perp) \circ f^A[\![S]\!]\right)\right),\ \alpha_{\hookrightarrow}\left(\gamma_{\hookrightarrow}(id^A)\right)\right)\right)$$

per la proposizione pg 33

$$\leq_{\hookrightarrow} \gamma_{\hookrightarrow}\left(\mathrm{cond}^A\left(\mathcal{B}^A[\![b]\!]\right),\ F_A^n(\perp) \circ f^A[\![S]\!],\ id^A\right)$$ per monotonia di cond e connessione di Galois.

$$= \gamma_{\hookrightarrow}\left(F_A^{n+1}(\perp)\right)$$ –