Architettura degli Elaboratori
5 - Sintesi di Reti Combinatorie

Zeynep KIZILTAN

Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Università degli Studi di Bologna

Anno Accademico 2007/2008

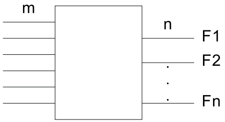
Avvisi

- Il primo parziale si svolgerà il giorno 10 Novembre 2007 alle ore 9. Occorre iscriversi tramite la interfaccia `http://phd.cs.unibo.it/iscrizioni` entro il giorno 4 Novembre alle ore 24.00.
- L'esame per l'account dei laboratori si terrà giovedi 25 ottobre in Laboratorio Ercolani con il seguente nuovo orario:
  - INF AL dovranno presentarsi alle 12:30
  - INF MZ dovranno presentarsi alle 11:00

Sommario

Reti Combinatorie: Sintesi

- Supponiamo di voler costruire una rete combinatoria che soddisfi certe proprietà.
- Prima di tutto: come possiamo **specificare** il comportamento che la rete combinatoria deve avere?
- Ciò che ci interessa è il suo comportamento funzionale.
  - La rete dovrà avere un certo numero m di entrate.
  - La rete dovrà avere un certo numero n di uscite.
  - Il suo comportamento atteso sarà poi specificato tramite n funzioni booleane in m variabili.



Reti Combinatorie: Sintesi

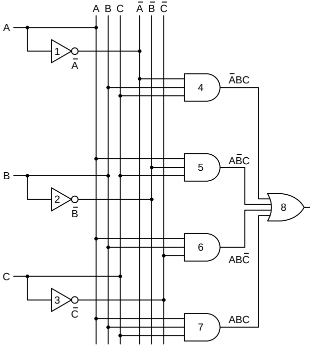
- Sappiamo già che:
  - data una funzione booleana, esiste sempre il modo di costruire un'espressione booleana ad essa corrispondente;
  - dall'espressione booleana, si passa facilmente ad una rete combinatoria.
- Non è però chiaro se il numero totale di porte logiche impiegate sia in qualche senso minimale.

Di Quante Porte Abbiamo Bisogno?

- Semplificando l'espressione come $\overline{A}B + AC$, si può ottenere un circuito più semplice.
- È quindi importante esprimere funzioni booleane in forme che:
  - facilitano le procedure di semplificazione delle espressioni booleane;
  - conducono a circuiti più semplici.
- Alcune di queste forme sono le **forme canoniche**.
- Le forme canoniche si basano su **mintermini** e **maxtermini**.

A	B	C	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(a)



(b)

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$$\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Mintermini

- Fissato un insieme $\{A_1, \ldots, A_n\}$ di variabili booleane, un **mintermine** è un prodotto nel quale tutte le variabili appaiono esattamente una volta, o in forma diretta o in forma negata.
  - Ad esempio, se l'insieme di variabili di riferimento è $\{A, B, C, D\}$, allora $A\overline{B}C\overline{D}$ e $\overline{A}\,\overline{B}CD$ sono mintermini, mentre $A + BC\overline{D}$ e $\overline{A}C\overline{D}$ non lo sono.
- Un mintermine rappresenta una delle combinazioni delle variabili binarie elencate nella tabella di verità:
  - assume il valore 1 solo per quella specifica combinazione;
  - assume il valore 0 per le altre combinazioni.
- Date n variabili, esistono 2^n mintermini distinti.
- E.g. nel caso di 2 variabili X e Y, i 4 mintermini sono:
  - $\overline{X}\,\overline{Y} \rightarrow 00$
  - $\overline{X}Y \rightarrow 01$
  - $X\overline{Y} \rightarrow 10$
  - $XY \rightarrow 11$

Mintermini per 3 Variabili

A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7		
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	m_1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	m_2
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	$\overline{A}\,B\,C$	m_3
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	$A\,\overline{B}\,C$	m_5
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$A\,B\,\overline{C}$	m_6
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	$A\,B\,C$	m_7

- Per ogni combinazione delle variabili, esiste il relativo mintermine che è il prodotto di 3 letterali.
- I letterali sono in forma diretta se il corrispondente bit nella relativa combinazione binaria è 1.
- I letterali sono in forma negata se il corrispondente bit nella relativa combinazione binaria è 0.

Mintermini per 3 Variabili

A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7		
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	m_1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	m_2
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	$\overline{A}\,B\,C$	m_3
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	$A\,\overline{B}\,C$	m_5
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$A\,B\,\overline{C}$	m_6
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	$A\,B\,C$	m_7

- Ciascun mintermine è identificato nella tabella con il simbolo m_j, dove j è l'equivalente decimale del numero binario corrispondente alla combinazione binaria per la quale il mintermine assume il valore 1.

Mintermini per 3 Variabili

A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7		
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	m_1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	m_2
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	$\overline{A}\,B\,C$	m_3
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	$A\,\overline{B}\,C$	m_5
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$A\,B\,\overline{C}$	m_6
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	$A\,B\,C$	m_7

- Le colonne intestate $m_0..m_7$ sono le tabelle di verità di tutti i mintermini.
- $m_i = 1$ solo per la combinazione delle variabili che corrisponde al mintermine m_i.

Maxtermini

- Il concetto di **maxtermine** è duale a quello di mintermine.
- Fissato un insieme $\{A_1, \ldots, A_n\}$ di variabili booleane, un **maxtermine** è una somma nel quale tutte le variabili appaiono esattamente una volta.
  - Ad esempio, se l'insieme di variabili di riferimento è $\{A, B, C\}$, allora $A + \overline{B} + C$ e $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ sono maxtermini, mentre $A + B + C + \overline{D}$ e $\overline{A}B + \overline{C}$ non lo sono.
- Un maxtermine rappresenta una delle combinazioni delle variabili binarie elencate nella tabella di verità:
  - assume il valore 0 solo per quella specifica combinazione;
  - assume il valore 1 per le altre combinazioni.
- Analogamente al caso dei mintermini, date n variabili, esistono 2^n maxtermini distinti.
- E.g. nel caso di 2 variabili X e Y, i 4 maxtermini sono:
  - $\overline{X} + \overline{Y} \rightarrow 11$
  - $\overline{X} + Y \rightarrow 10$
  - $X + \overline{Y} \rightarrow 01$
  - $X + Y \rightarrow 00$

Maxtermini per 3 Variabili

A	B	C	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7		
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	$A+B+C$	M_0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	$A+\overline{B}+C$	M_2
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	$\overline{A}+B+C$	M_4
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

- Per ogni combinazione delle variabili, esiste il relativo maxtermine che è la somma logica di 3 letterali.
- I letterali sono in forma diretta se il corrispondente bit nella relativa combinazione binaria è 0.
- I letterali sono in forma negata se il corrispondente bit nella relativa combinazione binaria è 1.

Maxtermini per 3 Variabili

A	B	C	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7		
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	$A+B+C$	M_0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	$A+\overline{B}+C$	M_2
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	$\overline{A}+B+C$	M_4
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

- Ciascun maxtermine è identificato nella tabella con il simbolo M_j, dove j è l'equivalente decimale del numero binario corrispondente alla combinazione binaria per la quale il maxtermine assume il valore 0.

Maxtermini per 3 Variabili

A	B	C	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7		
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	$A+B+C$	M_0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	$A+\overline{B}+C$	M_2
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	$\overline{A}+B+C$	M_4
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

- Le colonne intestate $M_0..M_7$ sono le tabelle di verità di tutti i maxtermini.
- $M_i = 0$ solo per la combinazione delle variabili che corrisponde al maxtermine M_i.

Mintermini vs Maxtermini

- È chiara adesso l'origine dei mintermini e maxtermini:
  - un mintermine è una funzione booleana, diversa da $f = 0$, avente il numero minimo di 1 (uno solo) nella propria tabella di verità;
  - un maxtermine è una funzione booleana, diversa da $f = 1$, avente il maggior numero di 1 ($2^n - 1$) nella propria tabella di verità.
- Si noti che un mintermine e un maxtermine identificati dallo stesso pedice sono l'uno il complemento dell'altro:

$$M_i = \overline{m_i}$$

- E.g.,

$$\overline{m_3} = \overline{\overline{A}BC} = A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$$

- Adesso vediamo il motivo per cui ci interessano mintermini e maxtermini.

Somme di Mintermini

- Una funzione booleana può essere espressa a partire dalla relativa tabella di verità, sommando tutti i mintermini che fanno assumere il valore 1 alla funzione.
  - Questa espressione è chiamata **somma di mintermini**.
- E.g.,

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- F assume il valore 1 per le combinazioni delle variabili X, Y, Z: 000, 010, 101, 111.

Somme di Mintermini

- E.g.,

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Questi combinazioni corrispondono ai mintermini m_0, m_2, m_5, m_7.
- Siccome $m_i = 1$ per la combinazione delle variabili che corrisponde al mintermine m_i, $F = m_0 + m_2 + m_5 + m_7$.
- Tale espressione può essere ulteriormente abbreviata elencando i pedici dei mintermini:

$$F(X, Y, Z) = \sum m(0, 2, 5, 7)$$

dove il simbolo $\sum$ indica la somma logica (OR) dei mintermini.
- Si consideri ora $\overline{F}$..

Somme di Mintermini

X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

- Si ottengono i valori di $\overline{F}$ nella tabella di verità scambiando i valori assunti da F.
- Considerando la somma logica dei mintermini di $\overline{F}$, si ottiene:

$$\overline{F} = m_1 + m_3 + m_4 + m_6$$

  o in forma abbreviata:

$$\overline{F}(X, Y, Z) = \sum m(1, 3, 4, 6)$$

- Quindi, i mintermini usati per esprimere $\overline{F}$ sono quelli che mancano dall'elenco di mintermini utilizzati per F.
- Si osservi come la somma di tutti i possibili mintermini sia equivalente alla costante 1.

Prodotti di Maxtermini

- Abbiamo visto che per ogni i, $\overline{m_i} = M_i$ e $\overline{M_i} = m_i$.
- Si consideri ancora $\overline{F}$.
- Si può ottenere F effettuando il complemento di $\overline{F}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{F}} &= \overline{m_1 + m_3 + m_4 + m_6} \\
F &= \overline{m_1}\;\overline{m_3}\;\overline{m_4}\;\overline{m_6} \\
&= M_1 M_3 M_4 M_6 \\
&= (X + Y + \overline{Z})(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + Y + Z)(\overline{X} + \overline{Y} + Z)
\end{aligned}
$$

- Quindi, una funzione booleana può essere espressa come **prodotto di maxtermini**.
- La forma abbreviata di questo prodotto è:

$$F(X, Y, Z) = \prod M(1, 3, 4, 6)$$

dove il simbolo $\prod$ indica il prodotto logico (AND) dei maxtermini.

Somme di Mintermini/Prodotti di Maxtermini

- Si noti che i numeri decimali inclusi nel prodotto di maxtermini della funzione F coincidono con quelli inclusi nella somma di mintermini della funzione $\overline{F}$:

$$F(X,Y,Z) = \prod M(1,3,4,6)$$

$$\overline{F}(X,Y,Z) = \sum m(1,3,4,6)$$

- Le somme di mintermini e i prodotti di maxtermini sono due rappresentazione canoniche della funzione di partenza.
- Ma, tali rappresentazioni contengono il massimo numeri di letterali.
- È possibile ridurre il numero di letterali?
- Sì, vediamo adesso come...

Somme di Prodotti

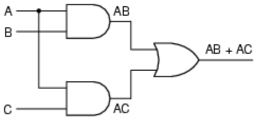
- Le somme di mintermini si possono generalizzare a **somme di prodotti** di letterali che non siano necessariamente somme di mintermini.
- Una somma di prodotti "semplice" per una certa funzione può essere ottenuta manipolando algebricamente la relativa somma di mintermini:
  - E.g.,:

$$
\begin{array}{rcl}
A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC & = & A\overline{B}C + AB(\overline{C} + C) \\
 & = & A\overline{B}C + AB \\
 & = & A(\overline{B}C + B) \\
 & = & A((\overline{B} + B)(C + B)) \\
 & = & A(C + B) = AC + AB
\end{array}
$$

- L'espressione finale è la somma di due prodotti, ciascuna con due letterali.

Somme di Prodotti

- Il circuito logico relativo ad una somma di prodotti consiste in un gruppo di porte AND seguite da una porta OR.
  - E.g.,:



- Ogni prodotto richiede una porta AND.
- La somma logica si forma con una porta OR ai cui ingressi arrivano le uscite delle porte AND e i segnali corrispondenti ai letterali singoli.

Prodotti Di Somme

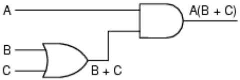
- Dualmente alle somme di prodotti, possiamo costruire **prodotti di somme** di letterali che non siano necessariamente prodotti di maxtermini.
- Anche in questo caso la manipolazione algebrica può aiutarci a ottenere un prodotto di somme semplice a partire da un prodotto di maxtermini:
  - E.g.,:

$$
\begin{aligned}
& (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C) \\
= \; & (A+B)(C+\overline{C})(A+\overline{B})(C+\overline{C})(\overline{A}+B+C) \\
= \; & A(B+\overline{B})(\overline{A}+B+C) \\
= \; & A\overline{A}+A(B+C) \\
= \; & A(B+C)
\end{aligned}
$$

- L'espressione finale è un prodotto di due somme, il primo con un letterale, il secondo con due letterali.

Prodotti Di Somme

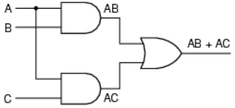
- Il circuito logico relativo ad un prodotto di somme consiste in un gruppo di porte OR seguite da una porta AND.
  - Ad esempio:



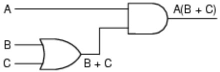
- Ogni somma richiede una porta OR.
- Il prodotto logico si forma con una porta AND ai cui ingressi arrivano le uscite delle porte OR e i segnali corrispondenti ai letterali singoli.

Implementazioni a Due Livelli

- Nel caso dei circuiti relativi a somme di prodotti e a prodotti di somme si parla di **implementazioni a due livelli**.



(Le porte AND seguite da una porta OR)



(Le porte OR seguite da una porta AND)

- In generale, potremmo avere a che fare con circuiti che non possono essere espressi su due livelli.
  - Ma le implementazioni a due livelli sono comunque **universiali**.
- Decidere se utilizzare un'implementazione a due livelli oppure multilivello (tre o più livelli) è una decisione critica a livello progettuale. Alcune considerazioni:
  - il numero di porte;
  - il numero di ingressi per ciascuna porta;
  - il ritardo che intercorre tra l'istante di applicazione dei segnali di ingresso e l'istante in cui sono disponibili i segnali in uscita.

Implementazioni a Due Livelli

- Nel seguito descriveremo una tecnica di semplificazione per le implementazioni a due livelli.
  - Si può comunque utilizzare la semplificazione algebrica, come già anticipato.
  - Tale tecnica, però, risulta di difficile implementazione. In particolare:
    - è difficile anticipare il risultato dei passaggi successivi;
    - è difficile determinare se è stata ottenuta l'espressione più semplice.
  - Verranno invece utilizzate le **mappe di Karnaugh**, che offrono una procedura diretta per la semplificazione di funzioni.
  - Se sono usate con attenzione, danna luogo all'espressioni più semplici.

Mappe di Karnaugh

- Una **mappa di Karnaugh** è un diagramma composto da celle.
- Tale diagramma può dare una rappresentazione grafica di una funzione booleana:
  - Ricordate che una funzione può essere espressa come somma di mintermini.
  - Ogni cella rappresenta un mintermine della funzione.
  - Quindi, una funzione è identificabile graficamente su una mappa come l'insieme delle celle corrispondenti ai mintermini.
- Possiamo anche vedere una mappa di Karnaugh come un modo per specificare la tabella di verità di una funzione.
  - In questa prospettiva, ad ogni cella della mappa di Karnaugh corrisponde un assegnamento di verità della funzione.
- A differenza di ciò che succede con le tabelle di verità, nelle mappe di Karnaugh, l'adiacenza fisica tra le celle corrisponde all'adiacenza logica dei corrispondenti assegnamenti di verità.
  - In altre parole, celle adiacenti corrispondono ad assegnamenti di verità alle variabili che differiscano nel valore assegnato ad una singola variabile.

La Mappa di Karnaugh a Due Variabili

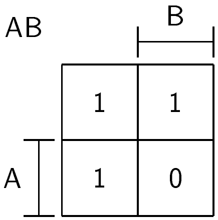
- La mappa di Karnaugh a due variabili è formata da 4 celle:
  - una per ciascun mintermine.
- 0 e 1 su righe e colonne denotano il valore delle due variabili X e Y.
  - E.g., la cella 00 denota X=0, Y=0.
- Nella mappa, ogni cella è etichettata con il corrispondente mintermine.
  - E.g., la cella 00 è riservata per m_0=X'Y'.

X \ Y	0	1
0	$\mathbf{m_0}$	$\mathbf{m_1}$
1	$\mathbf{m_2}$	$\mathbf{m_3}$

X \ Y	0	1
0	**X'Y'**	**X'Y**
1	**XY'**	**XY**

Mappa di Karnaugh a Due Variabili: Esempio

- Esistono altri modi di rappresentare le mappe di Karnaugh.
- Uno di questi usa delle barre per indicare gli insiemi delle celle dove una data variabile vale 1.
  - Il nome della variabile viene indicato a lato della barra o sopra la barra (vedi A e B in figura).



A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- A ogni cella della mappa corrisponde una riga della tabella di verità.
  - E.g., la cella in basso a sinistra corrisponde ad A=1, B=0.
  - A essa corrisponde la terza riga della tabella.
  - Il contenuto di tale cella (1) è il valore di verità di F per A=1 e B=0.

La Mappa di Karnaugh a Tre Variabili

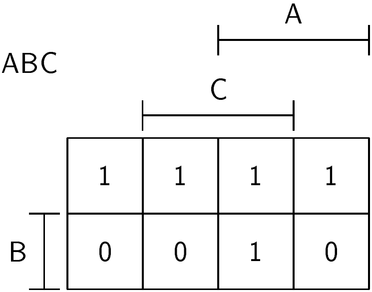
- La mappa di Karnaugh a tre variabili è formata da 8 celle.
  - Come al solito, a una cella corrisponde un mintermine.
- Le righe e colonne denotano il valore delle tre variabili X e (Y e Z) rispettivamente.
- Si noti che la sequenza nelle colonne (m_0, m_1, m_3, m_2) non è la usuale sequenza.
  - Solo un bit cambia tra celle adiacenti: 000$\leftrightarrow$001$\leftrightarrow$011$\leftrightarrow$010.
- Nella figura di destra, le barre nelle righe e colonne indicano gli insiemi delle celle dove X=1, Y=1, o Z=1. E.g.:
  - Tutte e sole le 4 celle della seconda riga hanno X=1.
  - Tutte e sole le 4 celle centrali hanno Z=1.

X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

				Y	
	X \ YZ	00	01	11	10
	0	X'Y'Z'	X'Y'Z	X'YZ	X'YZ'
X	1	XY'Z'	XY'Z	XYZ	XYZ'
			Z		

Mappa di Karnaugh a Tre Variabili: Esempio

- Ecco un esempio con variabili A, B, e C.
- Si noti la posizione delle variabili, diversa rispetto a prima.
  - A sta al posto di Y, B al posto di X, C al posto di Z.
- I contenuti delle celle sono i valori corrispondenti di F nella tabella di verità di F.
  - Per tutte le celle della prima riga (B=0), si ha F=1.
  - Anche per la cella in cui A=1, B=1 e C=1 (m_7) F vale 1.



A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

La Mappa di Karnaugh a Quattro Variabili

- La mappa di Karnaugh a quattro variabili ha 16 celle.
  - Come al solito, a una cella corrisonde un mintermine.
- Le righe e colonne denotano il valore delle quattro variabili (W e X) e (Y e Z).
- Le sequenze nelle colonne e nelle righe differiscono dalle usuali sequenze.
  - Solo un bit cambia tra celle adiacenti.

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

				Y		
	WX \ YZ	00	01	11	10	
	00	W'X'Y'Z'	W'X'Y'Z	W'X'YZ	W'X'YZ'	
	01	W'XY'Z'	W'XY'Z	W'XYZ	W'XYZ'	X
W	11	WXY'Z'	WXY'Z	WXYZ	WXYZ'	X
W	10	WX'Y'Z'	WX'Y'Z	WX'YZ	WX'YZ'	
			Z	Z		

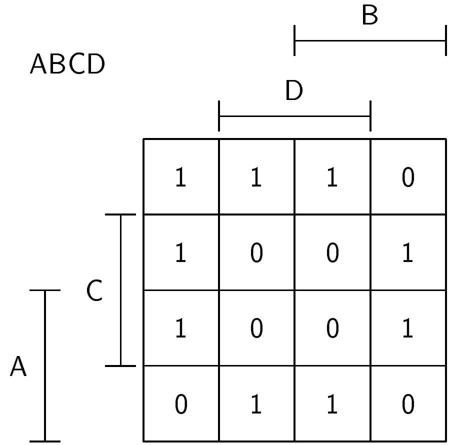
La Mappa di Karnaugh a Quattro Variabili

- Le barre nelle righe e colonne indicano gli insiemi delle celle dove W=1, X=1, Y=1, o Z=1. E.g.:
  - Tutte e sole le 8 celle delle ultime due righe hanno W=1.
  - Tutte e sole le 8 celle delle colonne centrali hanno Z=1.

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

				Y		
	WX \ YZ	00	01	11	10	
	00	W'X'Y'Z'	W'X'Y'Z	W'X'YZ	W'X'YZ'	
	01	W'XY'Z'	W'XY'Z	W'XYZ	W'XYZ'	X
W	11	WXY'Z'	WXY'Z	WXYZ	WXYZ'	
	10	WX'Y'Z'	WX'Y'Z	WX'YZ	WX'YZ'	
			Z			

Mappa di Karnaugh a Quattro Variabili: Esempio

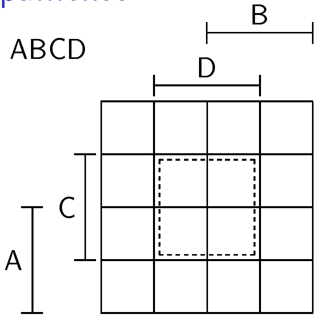


- Vediamo un esempio di mappa a 4 variabili.
- Le celle contengono i valori correspondenti nella tabella di verità di una funzione F.
  - Il blocco centrale di 4 celle, dove F=0, contiene gli assegnamenti per cui C=1 e D=1.

Raggruppamenti

- Consideriamo ora una mappa di Karnaugh a n variabili.
- Scegliamo $k \leq n$ variabili tra esse.
- Supponiamo che le k variabili scelte assumano ognuna un valore binario fissato a priori, mentre le altre $n - k$ possano prendere qualunque valore binario.
- In questo modo abbiamo implicitamente definito un insieme di assegnamenti di verità, cui corrisponderà una regione (insieme di celle) della mappa di Karnaugh, che chiamiamo **raggruppamento** (o **rettangolo**, o **accoppiamento**).
- In analogia con quanto avviene nei mintermini e nei maxtermini, possiamo associare ad ogni raggruppamento:
  - un **prodotto** di letterali che vale 1 solo negli assegnamenti del raggruppamento.
  - una **somma** di letterali, che vale 0 solo negli assegnamenti del raggruppamento.

Esempio di Raggruppamento

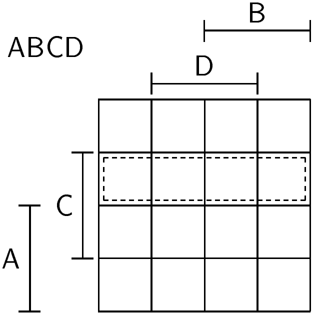


Prodotto Corrispondente: CD

Somma Corrispondente: $\overline{C} + \overline{D}$

- In quest'esempio è evidenziato il raggruppamento centrale.
- Tutte e 4 le celle del rettangolo centrale hanno C=1 e D=1.
- A e B invece possono prendere qualunque valore binario.
  - Al rettangolo corrisponde il prodotto di letterali CD.
    - Infatti esso vale 1 solo nelle celle interne al raggruppamento.
  - Al rettangolo corrisponde anche la somma di letterali $\overline{C}+\overline{D}$.
    - Tale somma vale 0 solo nelle celle interne al raggruppamento.

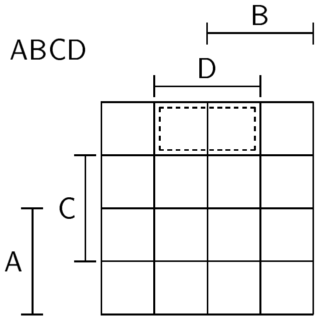
Esempio di Raggruppamento



- Vediamo un altro esempio con un raggruppamento di 4 celle.
- Le celle della seconda riga hanno tutte A=0 e C=1, invece B e D possono prendere qualunque valore.
- Abbiamo quindi:

$$\text{Prodotto Corrispondente: } \overline{A}C$$
$$\text{Somma Corrispondente: } A + \overline{C}$$

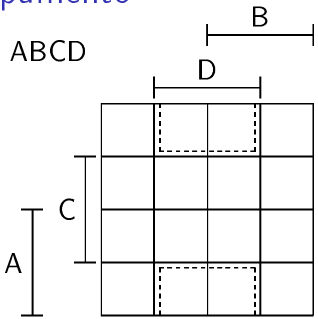
Esempio di Raggruppamento



- In quest'esempio invece abbiamo un rettangolo di 2 celle.
- Per queste celle, A=0, C=0 e D=1, invece B può prendere qualunque valore.
- Quindi:

$$\text{Prodotto Corrispondente: } \overline{A}\,\overline{C}D$$
$$\text{Somma Corrispondente: } A + C + \overline{D}$$

Esempio di Raggruppamento

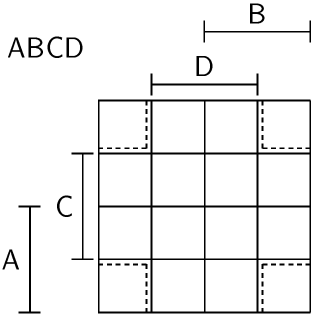


- Abbiamo di nuovo un rettangolo di 4 celle.
- Per queste celle, C=0 e D=1, invece A e B possono prendere qualunque valore. Quindi:

$$\text{Prodotto Corrispondente: } \overline{C}D$$
$$\text{Somma Corrispondente: } C + \overline{D}$$

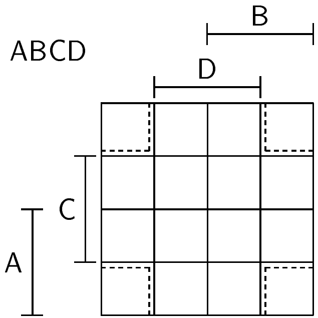
- Notare che si tratta di celle adiacenti, perché la prima e l'ultima riga sono tra loro adiacenti (differiscono solo per l'assegnamento di verità della variabile A).

Esempio di Raggruppamento



- Abbiamo ancora celle adiacenti.
- E.g., la prima cella della prima riga (0000) è adiacente:
  - alla prima cella dell'ultima riga (1000);
  - all'ultima cella della prima riga (0100).
- E.g., l'ultima cella della prima riga (0100) è adiacente:
  - alla prima cella della prima riga (0000);
  - all'ultima cella dell'ultima riga (1100).

Esempio di Raggruppamento



- Nel rettangolo di 4 celle evidenziato, C=0 e D=0, mentre A e B possono prendere qualunque valore.
- Da ciò otteniamo:

$$\text{Prodotto Corrispondente: } \overline{C}\ \overline{D}$$
$$\text{Somma Corrispondente: } C + D$$

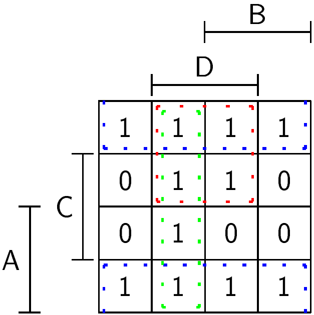
Come si Utilizzano le Mappe?

- Le mappe di Karnaugh servono a semplificare le funzioni booleane. L'idea è:
  1. esprimere la funzione come somma di mintermini;
  2. rappresentare i mintermini come '1' nella mappa;
  3. trovare una "buona" **copertura** degli '1'.
- Una copertura è un insieme di rettangoli che copra tutti e soli i mintermini.
  - E.g., l'insieme di tutte le celle con i mintermini è una copertura, in cui i rettangoli hanno tutti un solo elemento.
- In tal modo, troviamo una somma di prodotti per la funzione di partenza: basterà considerare la somma dei prodotti corrispondenti a tutti i raggruppamenti/rettongoli dell'insieme.
- Una *buona* copertura è quella che consente di semplificare la funzione.
- Come avviene la semplificazione?

Semplificazione in Forma di Somma di Prodotti

- La semplificazione avviene combinando più rettangoli.
- Due celle adiacenti differiscono sempre per una variabile, che è in forma diretta in una cella e negata nell'altra.
- La somma logica di due celle adiacenti è semplificata rimuovendo la variabile non in comune.
- Così, all'aumentare di celle combinate, si ottengono prodotti con meno letterali.
- Per 3 variabili:
  - Un rettangolo di 2 celle rappresenta un prodotto di 2 letterali.
  - Un rettangolo di 4 celle rappresenta un prodotto di 1 letterale.
- Per 4 variabili:
  - Un rettangolo di 2 celle rappresenta un prodotto di 3 letterali.
  - Un rettangolo di 4 celle rappresenta un prodotto di 2 letterali.
  - Un rettangolo di 8 celle rappresenta un prodotto di 1 letterale.

Esempio di Semplificazione



Somma di Prodotti: $\overline{C} + \overline{B}D + \overline{A}D$

- In quest'esempio è evidenziata una copertura con 3 rettangoli.
- Tutti i mintermini sono coperti.
- I rettangoli sono corrispondenti ai prodotti $\overline{C}$, $\overline{B}D$,$\overline{A}D$.

Esempio di Semplificazione

		D	B, D	B
	1	1	1	1
C	0	1	1	0
A, C	0	1	0	0
A	1	1	1	1

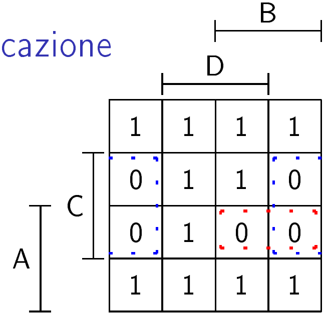
Somma di Prodotti: $\overline{C} + \overline{B}D + \overline{A}D$

- Altre coperture erano possibili: E.g.,
  - $\overline{A}\,\overline{C} + A\overline{C} + \overline{A}CD + A\overline{B}CD$
  - In tal caso, si potevano combinare alcuni raggruppamenti, per ottenere delle semplificazioni. E.g., era possibile:
    - combinare i due rettangoli adiacenti $\overline{A}\,\overline{C}$ e $A\overline{C}$, per ottenere il raggruppamento $\overline{C}$ di 8 celle, ed eliminare così una variabile.
    - combinare $\overline{A}CD$ con il rettangolo $\overline{A}\,\overline{C}D$ compreso nel rettangolo $\overline{C}$, per ottenere il rettangolo $\overline{A}D$ di 4 celle, ed eliminare così un'altra variabile.
    - combinare $A\overline{B}CD$ con le celle della seconda colonna, per ottenere il rettangolo $\overline{B}D$ di 4 celle, ed eliminare così 2

Semplificazione in Forma di Prodotto di Somme

- Finora è stata considerata la semplificazione in forma di somma di prodotti.
- Si consideri che:
  - i mintermini non inclusi nella funzione F appartengono a F';
  - F' è rappresentata nella mappa dalle celle non marcate 1.
- Per ottenere F in forma di prodotto di somme possiamo quindi procedere come segue:
  1. Si marcano le rimanenti celle con 0;
  2. Si combinano le celle di 0, ottenendo la semplificazione di F' in forma di somma di prodotti;
  3. Si complementa F' per ottenere F in forma di prodotto di somme.

Esempio di Semplificazione



Prodotto di Somme: $(\overline{C} + D)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

- La funzione F è rappresentata dagli 1.
- Si marcano le celle corrispondenti a F' con 0.
- Alcuni possibili raggruppamenti per gli 0 in forma di prodotti sono: $\overline{B}C\overline{D}$, $BC\overline{D}$, $ABCD$.
- Si procede alle semplificazioni:
  - $ABCD$ con $ABC\overline{D}$, contenuto in $BC\overline{D}$: otteniamo ABC.
  - $\overline{B}C\overline{D}$ con $BC\overline{D}$: otteniamo $B\overline{D}$.
- Otteniamo, per F', l'espressione $B\overline{D} + ABC$.
- Complementandola, si ottiene $(\overline{B} + D)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$.

Implicanti

- Durante il processo di semplificazione, bisogna assicurarsi che:
  - siano inclusi tutti i mintermini della funzione;
  - il risultato sia il più semplice ottenibile.
- I **primi implicanti essenziali** forniscono un metodo *sistematico* per il riconoscimento degli elementi *necessari* e *non ridondanti*.
- Cosa sono i primi implicanti essenziali?
- Data una funzione:
  - un **implicante** è un *prodotto di letterali*, che corrisponde a un rettangolo della mappa della funzione che contiene *soli 1*.
  - un **primo implicante** è un implicante ottenuto combinando il *massimo numero di celle adiacenti* nella mappa.
    - Quindi se rimuoviamo letterali da un primo implicante – cioè se allarghiamo il rettangolo – non abbiamo più un implicante.
  - un **primo implicante essenziale** è un primo implicante, che copre una *cella non coperta da nessun altro* primo implicante.

Semplificazione in Somma di Prodotti: Procedura Formale

- Esiste una procedura formale per la semplificazione di una mappa di Karnaugh in una somma di prodotti:

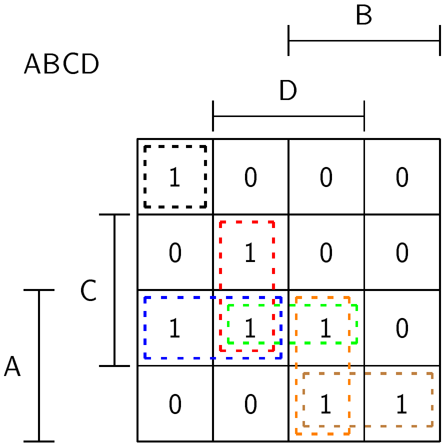
1. Prima di tutto, occorre **determinare tutti i primi implicanti**.
   - Nella mappa di Karnaugh, si evidenziano i rettangoli che:
     - contengono soli 1,
     - non sono inclusi in altri rettangoli di soli 1.
2. Occorre poi **isolare i primi implicanti essenziali**.
   - Nella mappa di Karnaugh, si selezionano i primi implicanti che hanno *solo celle contenute* in altri primi implicanti.
     - Tali implicanti *non sono essenziali* e vanno *scartati*.
3. L'**espressione semplificata** si ottiene come somma logica dei prodotti corrispondenti a:
   - i primi implicanti essenziali,
   - più eventuali primi implicanti non essenziali, ma necessari ad ottenere una copertura.

- Occorre assicurarsi che ogni primo implicante non essenziale incluso nella somma sia necessario!
  - cioè, deve contenere almeno un 1 non coperto da altri prodotti.

Esempio: Primi Implicanti

1. Determinare i primi implicanti.

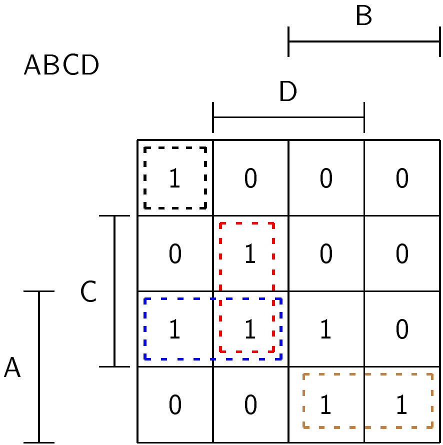
- In questa mappa sono evidenziati rettangoli che contengono soli 1.
- A ciascun rettangolo è associato un prodotto:
  - $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ (m_0)
  - $\overline{B}CD$ (m_3, m_{11})
  - $A\overline{B}C$ (m_{10}, m_{11})
  - ACD (m_{11}, m_{15})
  - ABD (m_{13}, m_{15})
  - $AB\overline{C}$ (m_{12}, m_{13})
- Non è possibile ottenere rettangoli più grandi togliendo dei letterali da questi implicanti.
  - Quindi sono tutti **primi implicanti**.
  - *Sono tutti essenziali*?



Esempio: Primi Implicanti Essenziali

2. Isolare i primi implicanti essenziali.

- Per isolare i primi implicanti essenziali, ci dobbiamo chiedere: *quali sono le celle coperte da un solo rettangolo?*
    - m_0
    - m_3
    - m_{10}
    - m_{12}
- Queste celle sono coperte da quattro diversi primi implicanti.
- Quindi, solo questi primi implicanti sono essenziali.



Esempio: Prima Possibilità

3. Ottenere l'espressione semplificata.

- Per finire, dobbiamo coprire le celle che:
  - contengono degli 1,
  - ma non sono coperte da primi implicanti essenziali.
- *Quali sono queste celle?*
  - Solo m_{15}.
- Quali primi implicanti coprono m_{15}?
  1. ACD (m_{11}, m_{15}).
  2. ABD (m_{13}, m_{15}).
- Prima possibilità: ACD

ABCD

1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	1	0
0	0	1	1

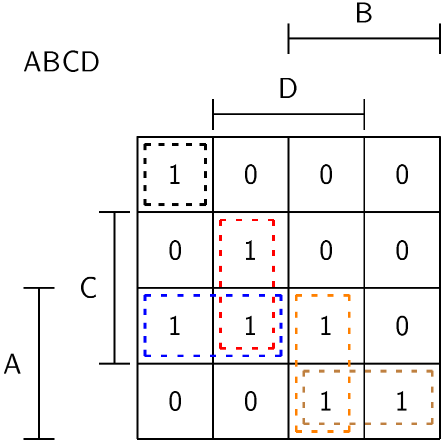
- *Espressione risultante* $\Rightarrow$

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}C+\overline{B}CD+AB\overline{C}+ACD$$

Esempio: Seconda Possibilità

3. Ottenere l'espressione semplificata.

- Per finire, dobbiamo coprire le celle che:
  - contengono degli 1,
  - ma non sono coperte da primi implicanti essenziali.
- *Quali sono queste celle?*
  - Solo m_{15}.
- Quali primi implicanti coprono m_{15}?
  1. ACD (m_{11}, m_{15}).
  2. ABD (m_{13}, m_{15}).
- Prima possibilità: ACD
- Seconda possibilità: ABD
- *Espressione risultante* $\Rightarrow$



$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}C+\overline{B}CD+AB\overline{C}+ABD$$

Semplificazione in Prodotto di Somme: Procedura Formale

- Abbiamo visto come costruire una somma di prodotti.
- *Come costruire invece un prodotto di somme?*
  1. Data una funzione booleana F, si considera il suo **complemento** $\overline{F}$.
     - Una mappa di Karnaugh per $\overline{F}$ si ottiene dalla mappa per F *invertendo* tutti i bit.
  2. Si applica poi alla mappa di Karnaugh per $\overline{F}$ la procedura di semplificazione, ottenendo una **somma di prodotti** per $\overline{F}$.
     - Non è necessario modificare la mappa di Karnaugh di F.
  3. Alla fine, si **trasforma** l'espressione in un **prodotto di somme** per F usando il teorema di De Morgan.
     - E.g., se $\overline{F} = AB + \overline{B}C\overline{D}$, allora:

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{\overline{F}} = \overline{AB + \overline{B}C\overline{D}} \\
&= \overline{AB} \cdot \overline{\overline{B}C\overline{D}} \\
&= (\overline{A} + \overline{B})(\overline{\overline{B}} + \overline{C} + \overline{\overline{D}}) \\
&= (\overline{A} + \overline{B})(B + \overline{C} + D)
\end{aligned}
$$

Condizioni di Non-Specificazione

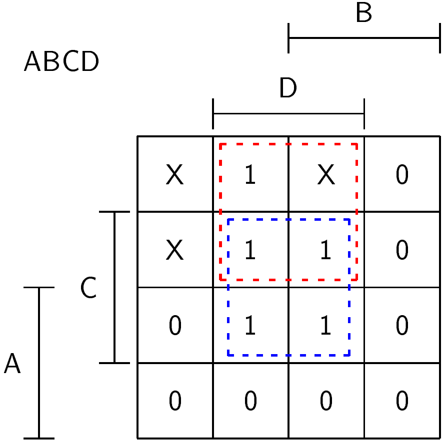
- Esistono applicazioni in cui non è specificato il valore della funzione per certe combinazioni di valori delle variabili.
- Ciò si può verificare in almeno due situazioni:
  - Alcuni possibili input *non si presentano mai in pratica* e, di conseguenza, non è rilevante il valore dell'output.
  - La rete combinatoria su alcuni input *può produrre indifferentemente* uno dei due valori in output.
- Tali funzioni si chiamano **funzioni non completamente specificate**.
- I *mintermini* non specificati si chiamano **condizioni di non-specificazione**, o "**don't care**".

Condizioni di Non-Specificazione

- Le condizioni di non-specificazione non possono essere marcate con 1 o 0 nella mappa:
  - il valore della funzione per quelle combinazioni di valori non è specificata.
- Tali celle sono marcate X per distinguerle da 1 e 0.
  - Infatti, esse **possono essere combinate con le celle 0 e 1** durante la semplificazione:
  - è indifferente che a un mintermine non specificato sia assegnato 1 o 0!
- La scelta di 0 o 1 dipende da quale possibilità genera l'espressione più semplice.
  - Si noti che, una volta ottenuta una espressione dalla mappa di Karnaugh, gli output *non* saranno più indeterminati!
  - L'espressione ottenuta assumerà precisi valori in corrispondenza di ogni dato assegnamento.

Condizioni di Non-Specificazione: Esempio

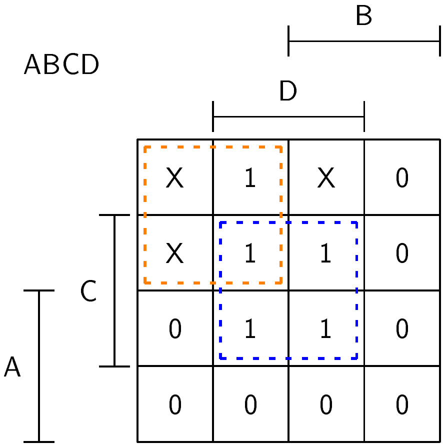
- In questa mappa esistono delle condizioni di non-specificazione:
  - sono le celle marcate con X (m_0, m_2, m_5).
- Per ciascuna X siamo liberi di combinarla come vogliamo.
- *Quali combinazioni generano i rettangoli maggiori?*
  - Abbiamo due possibilità:
    - (m_1, m_3, m_5, m_7)
    - (m_0, m_1, m_2, m_3)
- Prima possibilità: $\overline{A}D$
- *Espressione risultante* $\Rightarrow$



Somma di Prodotti: $\overline{A}D + CD$

Condizioni di Non-Specificazione: Esempio

- In questa mappa esistono delle condizioni di non-specificazione:
  - sono le celle marcate con X (m_0, m_2, m_5).
- Per ciascuna X siamo liberi di combinarla come vogliamo.
- *Quali combinazioni generano i rettangoli maggiori?*
  - Abbiamo due possibilità:
    - (m_1, m_3, m_5, m_7)
    - (m_0, m_1, m_2, m_3)
- Prima possibilità: $\overline{A}D$
- Seconda possibilità: $\overline{A}\,\overline{B}$
- *Espressione risultante* $\Rightarrow$



Somma di Prodotti: $\overline{A}\,\overline{B} + CD$