Esercitazioni di Reti Logiche

Algebra Booleana e Porte Logiche

Zeynep KIZILTAN
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Universita' degli Studi di Bologna
Anno Academico 2007/2008

Notizie

- Il primo parziale sarà o il 9 novembre (Venerdi') o il 10 novembre (Sabato), oppure il 12 novembre (Lunedi'). Presto sarò in grado di dirvi la data precisa.
- All'esame chiediamo tutto quello che abbiamo fatto <u>fino alle reti combinatorie</u>.

Argomenti

- Funzioni & espressioni booleane e loro semplificazioni.
- Algebra booleana.
- Tabella di verita'.
- Porte logiche.

L’algebra Booleana

- Si ricordino le identità di base dell’algebra booleana.

1.	$X+0 = X$	2.	$X.1 = X$	
3.	$X+1 = 1$	4.	$X.0 = 0$	
5.	$X+X = X$	6.	$X.X = X$	
7.	$X+X' = 1$	8.	$X.X' = 0$	
9.	$X'' = X$			

10.	$X+Y = Y + X$	11.	$XY = YX$	**Proprietà commutative**
12.	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	13.	$X(YZ) = (XY)Z$	**Proprietà associativa**
14.	$X(Y+Z) = XY+XZ$	15.	$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$	**Proprietà distributiva**
16.	$(X+Y)'=X'Y'$	17.	$(XY)'=X'+Y'$	**Teorema di De Morgan**

L'algebra Booleana

- Le prime nuove identita' coinvolgono una singola variabile.

1.	$X+0 = X$	2.	$X.1 = X$
3.	$X+1 = 1$	4.	$X.0 = 0$
5.	$X+X = X$	6.	$X.X = X$
7.	$X+X' = 1$	8.	$X.X' = 0$
9.	$X'' = X$		

10.	$X+Y = Y + X$	11.	$XY = YX$	**Proprietà commutative**
12.	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	13.	$X(YZ) = (XY)Z$	**Proprietà associativa**
14.	$X(Y+Z) = XY+XZ$	15.	$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$	**Proprietà distributiva**
16.	$(X+Y)'=X'Y'$	17.	$(XY)'=X'+Y'$	**Teorema di De Morgan**

L’algebra Booleana

- L’identita’ 9 stabilisce che la doppia negazione restituisce la variabile originale.

1.	$X+0 = X$	2.	$X.1 = X$	
3.	$X+1 = 1$	4.	$X.0 = 0$	
5.	$X+X = X$	6.	$X.X = X$	
7.	$X+X' = 1$	8.	$X.X' = 0$	
9.	$X'' = X$			
10.	$X+Y = Y + X$	11.	$XY = YX$	**Proprietà commutative**
12.	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	13.	$X(YZ) = (XY)Z$	**Proprietà associativa**
14.	$X(Y+Z) = XY+XZ$	15.	$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$	**Proprietà distributiva**
16.	$(X+Y)'=X'Y'$	17.	$(XY)'=X'+Y'$	**Teorema di De Morgan**

L’algebra Booleana

- Le identita’ 10 e 11 sono le leggi commutative.
- Stabiliscono che l’ordine in cui le variabili sono presenti non influenza il risultato quando si usano gli operatori AND e OR.

1.	$X+0 = X$	2.	$X.1 = X$	
3.	$X+1 = 1$	4.	$X.0 = 0$	
5.	$X+X = X$	6.	$X.X = X$	
7.	$X+X' = 1$	8.	$X.X' = 0$	
9.	$X'' = X$			
10.	$X+Y = Y + X$	11.	$XY = YX$	**Proprietà commutative**
12.	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	13.	$X(YZ) = (XY)Z$	**Proprietà associativa**
14.	$X(Y+Z) = XY+XZ$	15.	$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$	**Proprietà distributiva**
16.	$(X+Y)'=X'Y'$	17.	$(XY)'=X'+Y'$	**Teorema di De Morgan**

L’algebra Booleana

- Le identita’ 12 e 13 sono le leggi associative.
- Stabiliscono che il risultato di un’operazione con 3 variabili e’ independente dell’ordine con cui queste sono considerate.

1.	$X+0 = X$	2.	$X.1 = X$	
3.	$X+1 = 1$	4.	$X.0 = 0$	
5.	$X+X = X$	6.	$X.X = X$	
7.	$X+X' = 1$	8.	$X.X' = 0$	
9.	$X'' = X$			
10.	$X+Y = Y + X$	11.	$XY = YX$	**Proprietà commutative**
12.	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	13.	$X(YZ) = (XY)Z$	**Proprietà associativa**
14.	$X(Y+Z) = XY+XZ$	15.	$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$	**Proprietà distributiva**
16.	$(X+Y)'=X'Y'$	17.	$(XY)'=X'+Y'$	**Teorema di De Morgan**

L’algebra Booleana

- Le identita’ 14 e 15 sono le leggi distributive.

1.	$X+0 = X$	2.	$X.1 = X$	
3.	$X+1 = 1$	4.	$X.0 = 0$	
5.	$X+X = X$	6.	$X.X = X$	
7.	$X+X' = 1$	8.	$X.X' = 0$	
9.	$X'' = X$			
10.	$X+Y = Y + X$	11.	$XY = YX$	**Proprietà commutative**
12.	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	13.	$X(YZ) = (XY)Z$	**Proprietà associativa**
14.	$X(Y+Z) = XY+XZ$	15.	$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$	**Proprietà distributiva**
16.	$(X+Y)'=X'Y'$	17.	$(XY)'=X'+Y'$	**Teorema di De Morgan**

L'algebra Booleana

- Le identita' 16 e 17 sono il teorema di De Morgan.
- Si tratta di un teorema molto importante utilizzato per ottenere il complemento di un'espressione.

1.	$X+0 = X$	2.	$X.1 = X$	
3.	$X+1 = 1$	4.	$X.0 = 0$	
5.	$X+X = X$	6.	$X.X = X$	
7.	$X+X' = 1$	8.	$X.X' = 0$	
9.	$X'' = X$			
10.	$X+Y = Y + X$	11.	$XY = YX$	**Proprietà commutative**
12.	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	13.	$X(YZ) = (XY)Z$	**Proprietà associativa**
14.	$X(Y+Z) = XY+XZ$	15.	$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$	**Proprietà distributiva**
16.	$(X+Y)'=X'Y'$	17.	$(XY)'=X'+Y'$	**Teorema di De Morgan**

Semplificazione delle Espressioni Booleane

- Una funzione booleana, identificata da una espressione algebrica, puo’ essere trasformata in un circuito composto da porte logiche.
- In un’espressione, riducendo il numero dei termini/letterali, e’ possibile ottenere un circuito piu’ semplice.
- L’algebra booleana e’ applicata per ridurre un’espressione.

Esercitazione 1

- Ridurre le seguenti espressioni booleane al numero di letterali indicato:
  - $A'C' + ABC + AC'$ (tre letterali)
  - $(X'Y'+Z)' + Z + XY + WZ$ (tre letterali)
  - $A'B(D' + C'D) + B(A + A'CD)$ (un letterale)
  - $(A' + C)(A' + C')(A + B + C'D)$ (quattro letterali)

Funzioni in Forma Complementata

- Il complemento di una funzione può essere derivato algebricamente applicando il teorema di DeMorgan.

Esercitazione 2

- Utilizzando il teorema di DeMorgan, esprimere la funzione:

  $$F = X'Y'+X'Z+Y'Z$$

  - soltanto con operazioni OR e NOT;
  - soltanto con operazioni AND e NOT.

Tabella di Verità

- Una funzione booleana può essere rappresentata mediante una tabella di verità.
- Una tabella di verità è costituita da due parti:
  - Nella parte sinistra, vengono riportate tutte le combinazioni che possono essere assegnate alle variabili binarie.
  - Nella parte destra, vengono riportati i valori assunti dalla funzione.

Esercitazione 3

- Dimostrare, usando la tabella di verità, la validità delle seguenti identità:
  - Il teorema di DeMorgan per tre variabili: $(XYZ)' = X'+Y'+Z'$
  - La seconda legge distributiva: $X+YZ = (X+Y)(X+Z)$
  - Il teorema del consenso: $XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$

Esercitazione 3

- Per dimostrare la validità di una identità F = G, dobbiamo mostrare che F e G hanno la stessa tabella di verità.
  - Nel caso del teorema di DeMorgan per tre variabili:
    $F=(XYZ)'$ $G= X'+Y'+Z'$
  - Per F,si valuta il valore dell'espressione (XYZ)' per tutti i possibili valori di X, Y, Z, calcolando prima (XYZ) e poi il complemento.
  - Per G, si valutano prima X', Y', Z' e qundi l'AND tra essi.

Esercitazione 4

- L'operatore INHIBITION si indica con il simbolo / ed e' definito dalla seguente operazione logica: X / Y = XY'. Utilizzando la tabella di verita', provare che:
  - l'operatore INHIBITION non e' commutativo;
  - l'operatore INHIBITION non e' associativo.

Esercitazione 4

- Per provare che l’operatore INHIBITION non e’ commutativo, dobbiamo mostrare che le funzioni X/Y e Y/X non hanno la stessa tabella di verità.
- Per provare che l’operatore INHIBITION non e’ associativo, dobbiamo mostrare che le funzioni (X/Y)/Z e X/(Y/Z) non hanno la stessa tabella di verità.

Porte Logiche

- Una funzione booleana, identificata da una espressione algebrica, può essere trasformata in un circuito composto da porte logiche.
- Una porta NOT, che ha come ingresso il segnale X, genera il complemento X'.
- Una porta AND realizza l'operazione logica AND.
- Una porta OR realizza l'operazione logica OR.

Esercitazione 5

- Disegnare il diagramma logico per le seguenti espressioni booleane. Il diagramma deve corrispondere esattamente all'equazione e assumere che i complementi degli ingressi non siano disponibili.
  - $BC' + AB + ACD$
  - $(A + B)(C + D)(A' + B + D)$
  - $(AB + A'B')(CD' + C'D)$

Esercitazione 5

- Il circuito di BC' + AB + ACD e' costituito da:
  - una porta AND con ingressi A e B;
  - una porta NOT che complementa C;
  - una porta AND con ingressi A, C, D;
  - una porta AND con ingressi B e il segnale C' ottenuto in uscita dalla porta NOT;
  - una porta OR con ingressi i segnali AB, BC', ACD ottenuti in uscita dalle porte AND.

Esercitazione 5

- Il circuito di (A+B)(C+D)(A’+B+D) e’ costituito da:
  - una porta NOT che complementa A;
  - una porta OR con ingressi A e B;
  - una porta OR con ingressi C e D;
  - una porta OR con ingressi B, D e il segnale A’ ottenuto in uscita dalla porta NOT;
  - una porta AND con ingressi i segnali (A+B), (C+D), (A’+B+D) ottenuti in uscita dalle porte OR.

Esercitazione 5

- $(AB+A'B')(CD'+C'D)$
- L'operatore XOR, identificato dal simbolo $\oplus$, e' definitio dalla operazione logica:
  - $X \oplus Y = XY' + X'Y$
- La porta XOR realizza l'operazione logica XOR.
- L'operatore XNOR, identificato dal simbolo $\odot$, e' il complemento dello XOR ed è espresso dalla funzione:
  - $X \odot Y = XY + X'Y'$
- La porta XNOR realizza l'operazione logica XNOR.

Esercitazione 5

- Il circuito di (AB+A’B’)(CD’+C’D) e’ costutito da:
  - una porta XNOR con ingressi A e B;
  - una porta XOR con ingressi C e D;
  - una porta AND con ingressi i segnali $A \odot B$ e $C \oplus D$ ottenuti in uscita dalle porte XNOR e XOR.