remind CPS

Lorenzo Donatiello

Introduzione

Fenomeno casuale;

Esperimento casuale;

- Insieme dei possibili risultati di un esperimento casuale: Ω
- evento: sottoinsieme di Ω

Lancio di un dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Evento: esce un numero dispari $A = \{1,3,5\}$

Evento: esce un numero minore di 4; $A =\{1,2,3\}$

$A \cap B$; $A \cup B$; A^C

Introduzione

Studio di un fenomeno casuale siamo in presenza di:

Un insieme Ω (insieme dei possibili risultati)
Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω tale che:

- se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cup B \in \mathcal{A}$
- se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B \in \mathcal{A}$
- se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c \in \mathcal{A}$

Introduzione

Una famiglia $\mathcal{A}$ di parti di un insieme Ω si dice
una σ-algebra
se:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$;
- se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^C \in \mathcal{A}$
- se $A_1, A_2, .. A_i \ldots A_n \in \mathcal{A}$ allora:

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Introduzione

Sia Ω un insieme $\mathcal{A}$ una σ-algebra di parti di Ω.

una probabilità P è una applicazione $P : \mathcal{A} \rightarrow R^+$ tale che:

$P(\Omega) = 1$;
$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Introduzione

Fenomeno casuale;

Esperimento casuale;

indipendenza dei risultati di ogni esperimento: lancio di un dado;

Variabile Casuale: funzione che assegna un valore numerico al risultato di un esperimento casuale: dallo spazio Ω (ovvero dall'insieme delle parti A) a R^+

V.C: $\Omega \rightarrow R^+$

Introduzione

Esempi:

-) lancio di una coppia di dadi;

-) numero di richieste effettuate dalle ore 10 alle ore 12 ad un Call Center;

-) tempo impiegato per rispondere alla decima richiesta da parte di un call center

Introduction

- Variabile Casuale Discreta:

Se il numero di possibili valori che la VC può assumere è finito o numerabile. In genere (interessante per le noster applicazioni) i valori che può assumere sono interi.

X: V.C discreta

Prob(X=k) per k= 0,1,….
Prob(X=k) ≥0

Variabile Casuale Discreta:

Se il numero di possibili valori che la VC può assumere è finito o numerabile. In genere (interessante per le noster applicazioni) i valori che può assumere sono interi.

X: V.C discreta

Prob(X=k) per k= 0,1,….

Prob(X=k) ≥0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Prob(X=k)} = 1$$

Bernoulli -- Binomiale

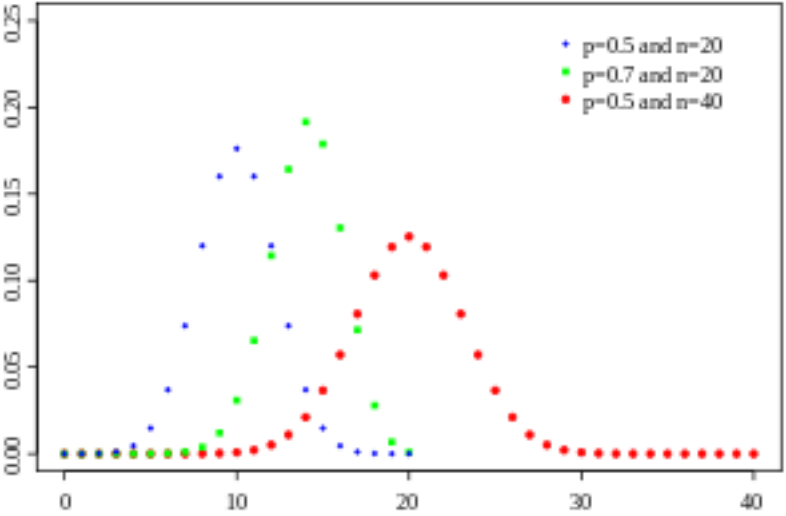
V.C di Bernoulli:

Prob(X=1) = p; P(X=2) = 1-p

V.C Binomiale:

Prob(X=i)=$\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$, i= 0,1,2,…n

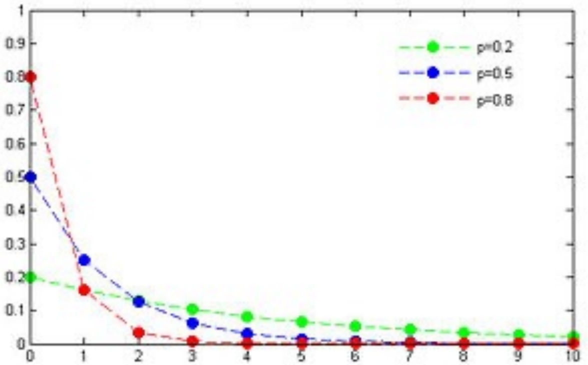
Binomiale



p=0.5 and n=20
p=0.7 and n=20
p=0.5 and n=40
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
10
20
30
40

Geometrica

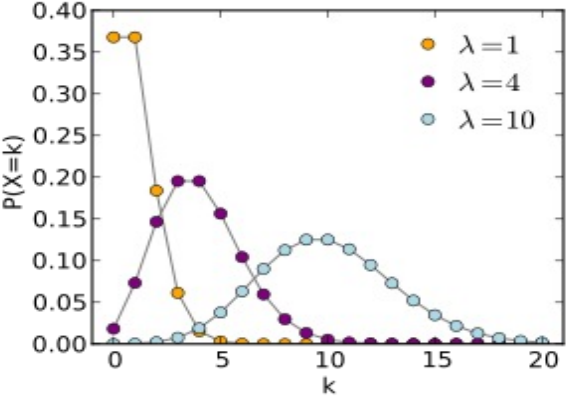
Prob(X=i)= $p(1-p)^i$, i= 0,1,2,…n



Poisson

Prob(X=k) = $(e^{-\lambda}\lambda^{\kappa})/k!$, k= 0,1,2,…

λ costante positiva



valore atteso

siano t_1, t_2,.. t_K i possibili valori che la V.C. X può assumere.

K può essere anche infinito

Prob(X= t_k) è la probabilità che la V.C X assuma il valore t_k

E[X]=$\sum_{k=1}^{K}$ t_k Prob(X= tk)

il valore E[X] è il valor medio (valore atteso) della V.C. X

valore atteso

g(X) è una funzione della V.C. X

E[g(X)]=$\sum_{k=1}^{K}$ g(tk) Prob(X= tk)

il valore E[X] è il valor medio (valore atteso) della V.C. g(X)

Momenti

E[X^n]=$\sum_{k=1}^{K}$ $t_k{}^n$ Prob(X= tk) (momento iniziale di ordine n)

E[(X- E(x))^n]=$\sum_{k=1}^{K}$ (t_k – E(x))^n Prob(X= tk)

(momento centrale di ordine n)

valore atteso

g(X) è una funzione della V.C. X

E[g(X)]=$\sum_{k=1}^{K}$ g(tk) Prob(X= tk)

il valore E[X] è il valor medio (valore atteso) della V.C. g(X)

Momenti

E[X^n]=$\sum_{k=1}^{K}$ t_k^n Prob(X= tk) (momento iniziale di ordine n)

E[(X- E(x)$)^n$]=$\sum_{k=1}^{K}$ (t_k – E(x)$)^n$ Prob(X= tk)

(momento centrale di ordine n)

Varianza: momento centrale di ordine 2

VAR (X) =E[(X- E(x))^2]=$\sum_{k=1}^{K}$ (t$_k$ – E(x))2 Prob(X= tk)

$VAR(X)$ = E(X^2) – (E(X)^2)

Deviazione Standard: $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR(X)}}$

Coefficiente di Variazione: C(X) = ($\sqrt{\mathrm{VAR(X)}}$)/E(X)

Diseguaglianza di Chebyshev:
Prob(|X-E(X)|≥ b)≤ (σ /b)^2
Prob(|X-E(X)|≥ b σ)≤ (1/b)^2
b > 0

V.C.	parametri	E(X)	VAR(X)	C(X)
Binomiale	n,p	np	$np(1-p)$	$((1-p)/np)^{1/2}$
Geometrica	$0< p <1$	$p/(1-p)$	$p/(1-p)^2$	$1/p^{1/2}$
Geometrica(1)	$0< p <1$	$p/(1-p)$	$p/(1-p)^2$	$p^{1/2}$
Poisson	$l>0$	λ	λ	$1/(\lambda^{1/2})$

Funzioni di ripartizione

X: Variabile Casuale

Prob($X \leq t$) indichiamo la probabilità che la V.C X assuma un valore minore o uguale a t.

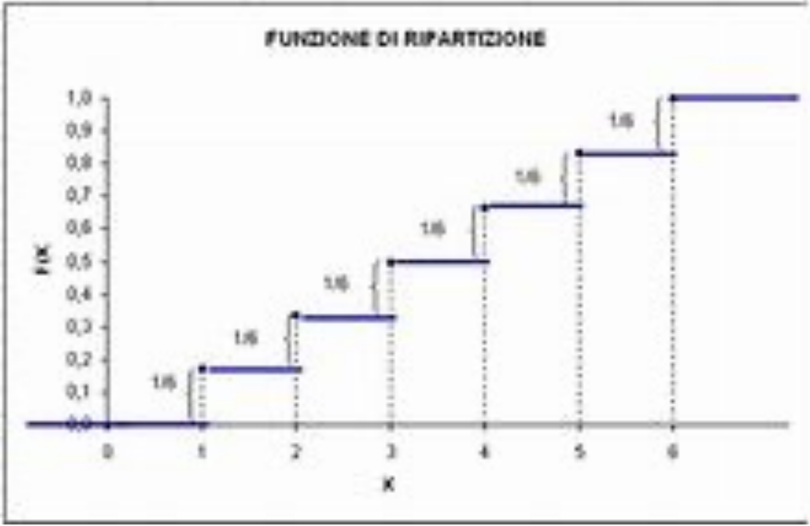
$F_X(t)$ = Prob($X \leq t$) è nota come Funzione di ripartizione della V.C. X

$0 \leq F_X(t) \leq 1$
$F_X(-\infty) = 0$
$F_X(+\infty) = 1$

$t_2 > t_1 \rightarrow F_X(t_2) \geq F_X(t_1)$

Prob($t1 < X \leq t2$) = $F_X(t_2) - F_X(t_1)$ verificato che $t_2 > t_1$

Funzioni di ripartizione



Variabile Casuale Continua:

X è una V.C. continua se la sua funzione di ripartizione è continua e differenziabile.

(la funzione potrebbe essere non differenziabile su un insieme finito di punti)

la funzione è definita su un intervallo [a,b], a<b.
$a = -\infty$, $b = +\infty$ sono consentiti.

funzione di densità di probabilità:

$f_X(t) = d\,F_X(t)/dt$

Variabile Casuale Continua:

$f_X(t) = d\, F_X(t)/dt$

$f_X(t) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) = 1$

$\mathrm{Prob}(\ t_1 < X \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(t)dt \qquad t_1 < t_2$

$\mathrm{Prob}(\ \ X > t_3) = \int_{t_3}^{\infty} f_X(t)dt$

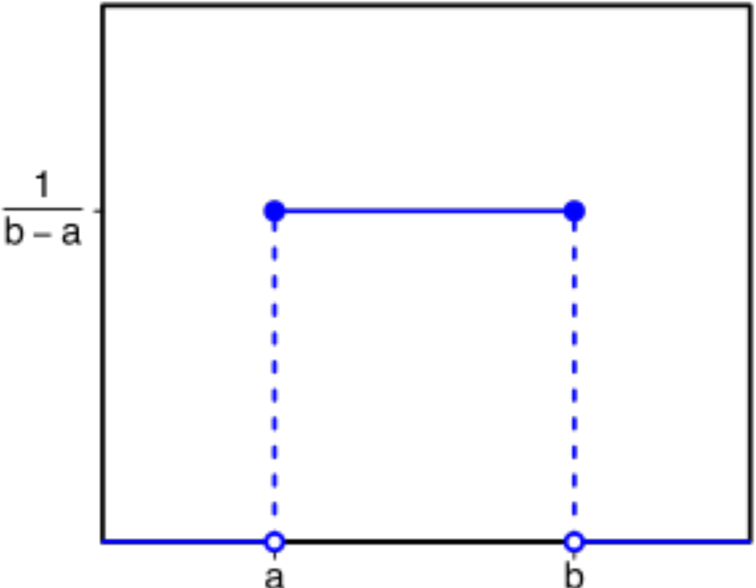
Prob(X = 0) ???

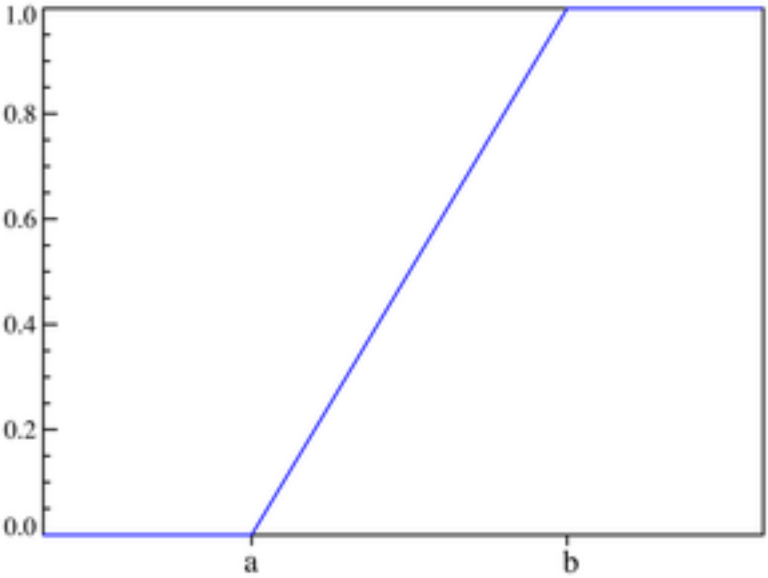
Variabile Casuale Uniforme:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \ o \ t > b \\ \frac{1}{b-a} & a < t < b \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ (t-a)/(b-a) & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

Variabile Casuale Uniforme:

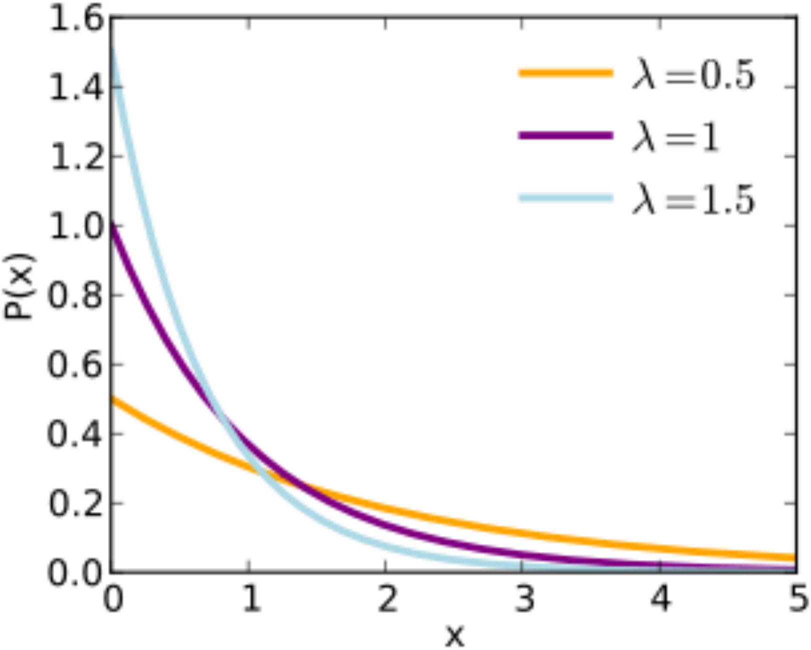


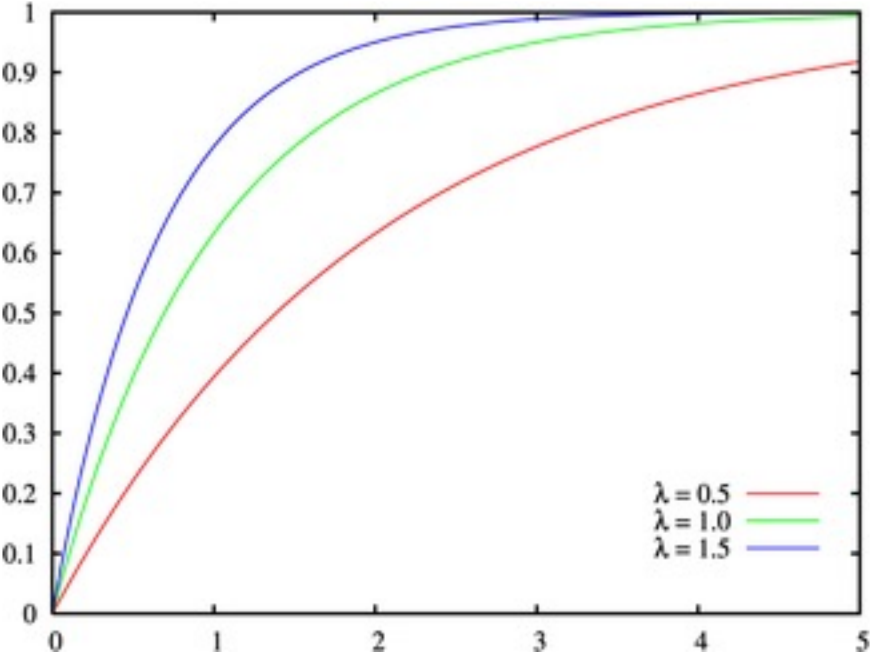

1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
a
b

Variabile Casuale Esponenziale

$$f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda t} \; t \geq 0 \end{cases}$$


1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
P(x)
0
1
2
3
4
5
x
$\lambda = 0.5$
$\lambda = 1$
$\lambda = 1.5$


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
λ = 0.5
λ = 1.0
λ = 1.5

Variabile Casuale Iperesponenziale

0<p<1

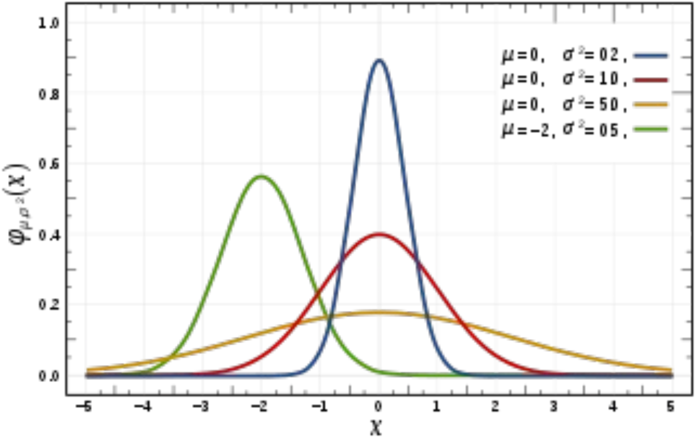
$$f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \mathrm{p}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \mathrm{p}e^{-\lambda_1 t} - (1-p)e^{-\lambda_2 t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Gaussiana $N(\mu, \sigma^{2)}$

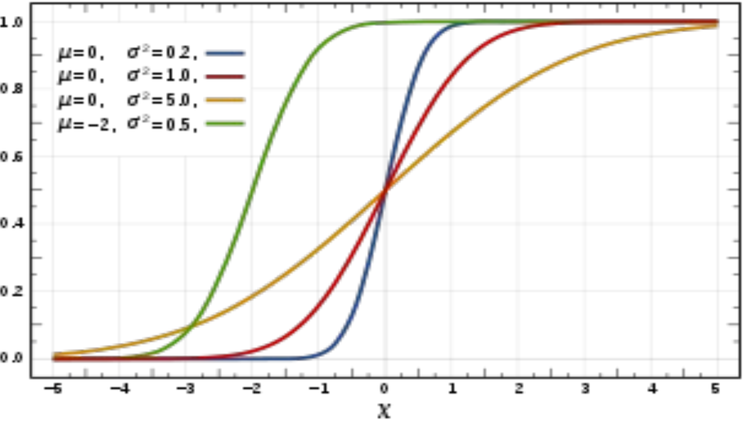
$f_X(t) = (1/2\pi\sigma^2)^{1/2} \exp(-(t-\mu)^2/2\sigma^2)$

definita per tutti i valori di t



$$f_X(t) = (1/2\pi\sigma^2)^{1/2} \exp(-(t-\mu)^2/2\sigma^2)$$

definita per tutti i valori di t



percentili

X: V.C.

$0<q<1$

$t_q(X)$ denota il più piccolo valore di t per cui vale:

$F_X(t) \geq q$

il valore $t_q(X)$ è chiamato (100*q)-esimo percentile di X

proprietà:

$F_X(t) < q$ se $t < t_q(X)$

$F_X(t) \geq q$ se $t > t_q(X)$

indipendenza tra V.C.

X_1, X_2, X_3,…. X_n

se $\text{Prob}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, X_3 \leq t_3, \ldots X_n \leq t_n) =$
$\text{Prob}(X_1 \leq t_1)\ \text{Prob}(X_2 \leq t_2) \ldots \text{Prob}(X_n \leq t_n)$ -->

le V.C sono statisticamente indipendenti

$X_1, X_2, X_3, \dots. X_n$

E$[\sum_{i=1}^{n} c_i\, X_i]$ = $\sum_{i=1}^{n} c_i\, E[Xi]$

relazione vale anche se le variabili casuali NON sono indipendenti

Se $X_1, X_2, X_3, \dots. X_n$ sono indipendenti

$E[X_1\, X_2\, X_3 \dots. X_n\,] = E[X_1]\, E[X_2]\, E[X_3]_{\dots.}\, E[X_n]$

Cov[X,Y] = E[(X-E(X)(Y- E(Y)] = E[XY]-E[X]E[Y]

Cov[X,X] = Var[X]

se due V.C. sono indipendenti → $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$

$\mathrm{Cor}[X,Y] = \mathrm{Cov}[X,Y] /(\mathrm{Var}[X]\ \mathrm{Var}[Y])^{1/2}$

Legge dei grandi numeri

X_1, X_2, X_3,…. X_n variabili casuali indipendenti e aventi la stessa distribuzione di probabilità
assumiamo media **m** e varianza **V**

$S_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i)/n$ per n → ∞
S_n --> **m**

Teorema del limite centrale

La V.C $Z_n = n^{1/2}(S_n-\mathbf{m})/\mathbf{V}^{½}$ → N(0,1)