Esercitazione di Logica Matematica

24 Novembre 2009

Regolamento

- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola.
- È possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri per deduzione naturale la validità della formula: $(A \to C) \vee (B \to C) \to (A \wedge B \to C)$

   Soluzione

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B}\,2}{\mathrm{A}}\,\wedge\mathrm{e} \qquad \dfrac{}{A \to C}\,1}{\mathrm{C}}\,\to\mathrm{e} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B}\,2}{B}\,\wedge\mathrm{e} \qquad \dfrac{}{B \to C}\,1}{C}\,\to\mathrm{e} \qquad \dfrac{}{(A \to C) \vee (B \to C)}\,3}{C}\,\vee\mathrm{e}}{A \wedge B \to C}\,\to\mathrm{i}\,2}{(A \to C) \vee (B \to C) \to (A \wedge B \to C)}\,\to\mathrm{i}\,3
$$

2. Si dimostri la conseguenza logica:

$$\exists x(A(x) \vee B(x)), \forall x(A(x) \to C(x)), \forall x(B(x) \to C(f(x))) \models \exists x C(x)$$

   (a) Per deduzione naturale

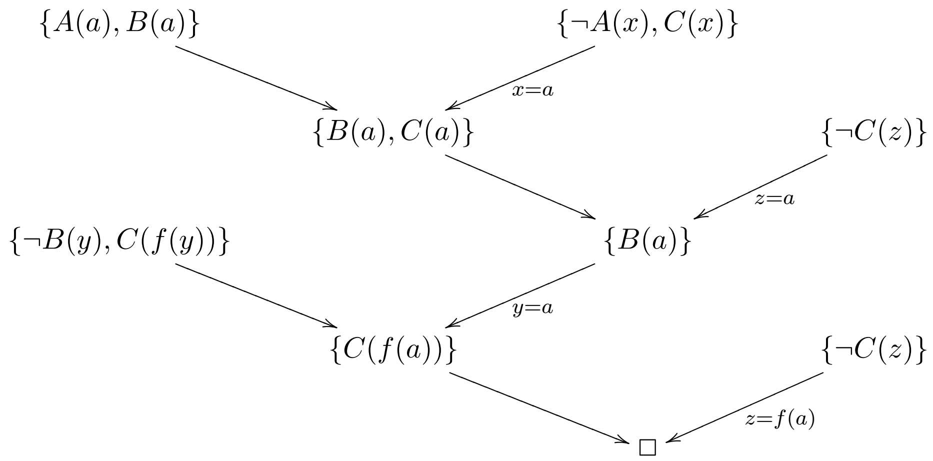
   (b) Per risoluzione

   Soluzione

   (a) L'albero di deduzione naturale è il seguente:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(A(x) \to C(x))}{A(x) \to C(x)}\,\forall\mathrm{e} \qquad \dfrac{}{A(x)}\,1}{C(x)}\,\to\mathrm{e}}{\exists x C(x)}\,\exists\mathrm{i} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(B(x) \to C(f(x)))}{B(x) \to C(f(x))}\,\forall\mathrm{e} \qquad \dfrac{}{B(x)}\,1}{C(f(x))}\,\to\mathrm{e}}{\exists x C(x)}\,\exists\mathrm{i} \qquad \dfrac{}{A(x) \vee B(x)}\,2}{\exists x C(x)}\,\vee\mathrm{e}\,1 \qquad \exists x(A(x) \vee B(x))}{\exists x C(x)}\,\exists\mathrm{e}\,2
$$

   (b) Le clausole sono: $\{A(a), B(a)\}, \{\neg A(x), C(x)\}, \{\neg B(y), C(f(y))\}, \{\neg C(z)\}$



3. Descrivere tutti i modelli della formula: $\forall x(A(x) \to B(f(x)))$

   Soluzione Si consideri un generico dominio $\mathcal{D}$ perché la formula sia soddisfatta è sufficiente che $f^I(A^I) \subseteq B^I$. Cioé l'immagine degli elementi che soddisfano A è un sottoinsieme di B.

4. È data la seguente formula:

$$\exists x C(x) \land \forall x(B(x) \to A(x)) \land \exists x \neg B(x) \land \forall x(C(x) \to B(f(x))) \to \forall x A(x)$$

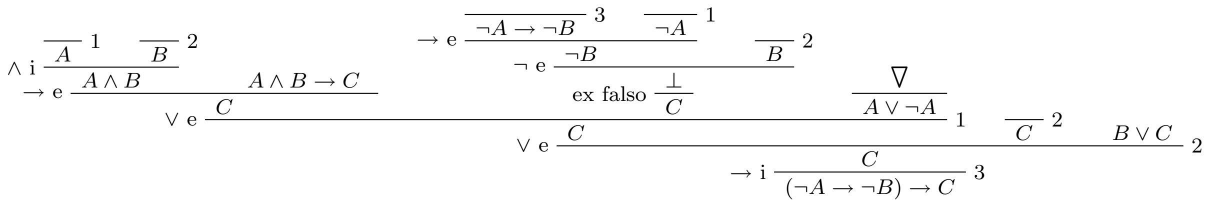
   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

   Soluzione La formula è soddisfacibile infatti si considerino le seguenti interpretazioni:
   $\mathcal{A} \models P \quad D^{\mathcal{A}} = \{0\} \quad A^{\mathcal{A}} = B^{\mathcal{A}} = C^{\mathcal{A}} = \emptyset \quad f^{\mathcal{A}}(0) = 0$
   $\mathcal{B} \not\models P \quad D^{\mathcal{B}} = \{0, 1\} \quad A^{\mathcal{B}} = B^{\mathcal{B}} = C^{\mathcal{B}} = \{0\} \quad f^{\mathcal{B}}(0) = 0 \quad f^{\mathcal{B}}(1) = 0$

5. Si dimostri la conseguenza logica: $A \land B \to C, B \lor C \models (\neg A \to \neg B) \to C$
   (a) Per deduzione naturale
   (b) Per risoluzione .

   Soluzione

   (a) L'albero di deduzione naturale è il seguente:



(b) Le clausole sono: $\{B, C\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B, C\}$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg A, \neg B, C\} \arrow[dr] & & \{A, \neg B\} \arrow[dl] & & \\
& \{\neg B, C\} \arrow[dr] & & \{B, C\} \arrow[dl] & \\
& & \{C\} \arrow[dr] & & \{\neg C\} \arrow[dl] \\
& & & \square &
\end{tikzcd}$$