Esercitazione di Logica Matematica

17 Novembre 2009

Regolamento

- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola.
- È possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Sia data una formula F nel linguaggio

$$F ::= A(t_1, \ldots, t_n) \mid F_1 \vee F_2 \mid \forall x F_1$$

Dimostrare che se y non occorre in F allora $v^{(\mathcal{S}, \varphi^{\mathcal{S}}[a/x])}(F) = v^{(\mathcal{S}, \varphi^{\mathcal{S}}[a/y])}(F[y/x])$.

2. Tradurre in un opportuno linguaggio al prim'ordine la seguente frase:

" *Se nessuna mucca è carnivora e qualche mammifero è una mucca allora qualche mammifero non è carnivoro*"

Utilizzare i seguenti predicati:

- $M(x) = \{x$ è una mucca$\}$
- $C(x) = \{x$ è carnivoro$\}$
- $A(x) = \{x$ è mammifero$\}$

Stabilire (dimostrandolo), inoltre, se la frase è una tautologia.

3. Data la seguente formula

$$F = \exists x B(a, x) \vee (\exists y \forall x B(y, f(x)) \rightarrow \exists x A(x))$$

(a) Trovare la formula F^P in forma normale prenessa equivalente alla formula data

(b) Costruire la skolemizzata di F^P

(c) Sia F_1 la formula skolemizzata appena ottenuta, tale formula sarà pertanto della forma $F_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_n F_2$. Si trovi la forma normale congiuntiva di F_2

4. Date le seguenti formule

(a) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow C(x)) \wedge \forall x(B(x) \rightarrow C(f(x))) \rightarrow \forall x C(x)$

(b) $\exists x(\neg A(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow C(x, f(y)))) \rightarrow \forall y(B(y) \rightarrow \exists x(\neg A(x) \rightarrow C(x, f(y))))$

Trovare per ognuna di esse un'interpretazione che soddisfa la formula ed una che non la soddisfa.

5. Descrivere tutti i modelli della formula

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$$