Esercitazione di Logica Matematica

06 Ottobre 2009

Regolamento

- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola.
- È possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Scrivere in notazione abbreviata:
   (a) $2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 6^3$
   (b) $(1 + a) \cdot (2 + a) \cdot (3 + a) \cdot (4 + a) \cdot (5 + a) \cdot (6 + a) \cdot (7 + a)$
2. Si dimostri per induzione che vale la seguente uguaglianza:
$$\sum_{i=m}^{n} i = \frac{(n - m + 1)(n + m)}{2}$$
3. Si dimostri che se $A \subseteq C$, $B \subseteq C$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = C$ allora $A = C \smallsetminus B$.
4. Le funzioni seguenti sono iniettive? suriettive? biunivoche? Giustificare le risposte.
   (a) Sia $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3\}$ così definita:
$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari e multiplo di 5} \\ 2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
   (b) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita:
$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$
5. Quali delle seguenti relazioni sono funzioni? Giustificare le risposte.
   (a) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 = 1\}$
   (b) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\ x = 2y\}$
   (c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\ y = 2x\}$
6. (**) Dimostare che la seguente relazione su è una relazione d'equivalenza:

   Fissato un sistema di assi cartesiani su $\pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definiamo una relazione $\sim$ tale che dati $P, Q \in \pi$, $P \sim Q$ se P e Q hanno la stessa ordinata. Nota bene: i punti in π sono coppie di valori (x, y) in cui x si chiama ascissa e y ordinata.