DEDUZIONE NATURALE

Metodo per dimostrare la validità di una formula.
Come per la risoluzione (ma diversamente dalle tavole di verità che si reggono sull'interpretazione del significato degli operatori logici) la deduzione naturale non fa alcun riferimento esplicito a nozioni semantiche.
Questo metodo si basa sull'idea che date determinate premesse è possibile derivare (dimostrare) determinate conclusioni (Scriveremo $\Gamma \vdash F$)
La dimostrazione è rappresentata da un albero rovesciato in cui:

- foglie: formule contenute in Γ
- F: radice dell'albero

Es $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \vdash F$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \quad \Gamma_2}{\Gamma_1'} \quad \cdots \quad \dfrac{\Gamma_m \quad \Gamma_{m+1} \ \ldots \ \Gamma_n}{\Gamma_m'}}{\vdots \atop F}$$

foglie

radice

Regole

Dimostrazione

Le regole sono fissate, la composizione di più regole è giustificata dalla Regola del taglio:

$\Gamma \vdash A$ e $\Gamma, A \vdash B$ allora $\Gamma \vdash B$

N.B. Le ipotesi possono essere utilizzate quante volte si vuole

Regole:

Tutte le regole hanno la forma

$$\frac{\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \dots \quad \Gamma_m}{P}$$

con il significato: assumendo che $\Gamma_1, \dots \Gamma_m$ siano formule vere allora posso dedurre che anche P è vero

Le regole mirano a scomporre e ricomporre le formule per questo motivo per ogni connettivo avremo una regola di introduzione ed una di eliminazione

CONGIUNZIONE

Eliminazione:

$$\wedge e.1 \ \frac{A \wedge B}{A} \qquad \wedge e.2 \ \frac{A \wedge B}{B}$$

Nome della regola

N.B. Da utilizzare sempre è un auto controllo della correttezza dell'albero

Spiegazione: poiché $A \wedge B$ è vero allora segue che una delle due componenti è vera

Introduzione:

$$\wedge i \ \frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

Spiegazione: è un albero con 2 ipotesi se mi assicurano che A è vera e che B è vera allora necessariamente $A \wedge B$ è vera

Disgiunzione:

Introduzione:

$$\vee i.1 \frac{A}{A \vee B} \qquad \vee i.2 \frac{B}{A \vee B}$$

Spiegazione: se A è vero posso aggiungere (disgiungere) qualsiasi formula che il significato non cambia

Eliminazione:

È più difficile infatti se conosco $A \vee B$ non c'è modo di sapere quale sia la formula vera

$$\cancel{\frac{A \vee B}{A}}$$

NO SBAGLIATO!
NON ESISTE!

La regola è complessa, ho bisogno di ipotesi aggiuntive, TEMPORANEE

$$\vee e \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \overline{A}^{1} \\ \nabla \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma, \overline{B}^{1} \\ \nabla \\ C\end{array} \qquad A \vee B}{C}\,1$$

La regola dice se a partire da un certo insieme di ipotesi Γ e da A esiste una dimostrazione per C (esiste un albero di derivazione per C) e equivalentemente da Γ e da B posso derivare la stessa formula C allora indipendentemente dal fatto che io conosca il valore di verità di A o di B sapendo che una delle due è valida poiché $A \vee B$ è valida allora posso dedurre che vale la

formula C, cancellando (scaricando) le ipotesi A e B che non servono più

N.B. aggiungere il numero per ricordare in che punto e con quale regola ho scaricato l'ipotesi.

IMPLICAZIONE

Eliminazione : (Modus ponens)

$$\to e \quad \frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Spiegazione: Se $A \to B$ è vero e la premessa A è vera allora deve necessariamente seguire che B è vero

Introduzione : più difficile

$$\to i \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \overline{A}^{\,1} \\ \nabla \\ B\end{array}}{A \to B}\,1$$

Scaricamento

Spiegazione: Se esiste un albero di derivazione per B a partire da Γ e A allora da Γ posso dedurre che $A \to B$ e eliminare l'ipotesi A

La regola ricorda il teorema $\Gamma, A \vDash B$ allora $\Gamma \vDash A \to B$

N.B. la regola di introduzione dell'implica può essere usata anche senza scaricamento

$$\rightarrow i \quad \frac{B}{A \rightarrow B}$$

infatti se A fosse falso $A \rightarrow B$ vero - e se A fosse vera so che B è vera quindi $A \rightarrow B$ vera

NEGAZIONE:

Eliminazione:

$$\neg e \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ F\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ \neg F\end{array}}{\perp}$$

Spiegazione: se posso derivare sia la formula F che il suo opposto allora l'insieme di formule Γ era contraddittorio

Introduzione: è la dimostrazione per assurdo

$$\neg i \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \overline{F}^{\,1} \\ \nabla \\ \perp\end{array}}{\neg F}\,1$$

scaricamento

Spiegazione:

se per assurdo ho supposto F vero e ho concluso che da Γ, F deriva il falso allora devo concludere che vale $\neg F$ scaricando l'ipotesi F

Ex FALSO: generalizzazione della precedente:

dal falso segue qualsiasi cosa (ex falso quod libet)

$$\perp e \; \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ \perp\end{array}}{F}$$

N.B. l'introduzione della negazione si può usare anche così:

$$\neg i \; \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \overline{\neg F}^{\,1} \\ \nabla \\ \perp\end{array}}{F}\,1$$

QUANTIFICATORE UNIVERSALE

Eliminazione:

$$\forall e \; \dfrac{\forall x\, A(x)}{A[t/x]}$$

Spiegazione: Se $\forall x\, A(x)$ è vera allora $A[t/x]$ è vera per qualsiasi istanziazione di x

Introduzione:

$$\forall i \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A[y/x]\end{array}}{\forall x\, A(x)}$$

$\Gamma \longrightarrow$ y non compare libera in nessuna delle foglie non cancellate.

Spiegazione: se y non compare libera in Γ allora la derivazione di $A[y/x]$ è indipendente dalla particolare istanziazione y e quindi posso generalizzare e concludere che vale $\forall x\, A(x)$

N.B. Il $\forall$ è la generalizzazione dell'$\wedge$ infatti poiché la derivazione di A non dipende da y e come se:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A(y_1)\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A(y_n)\end{array}}{\bigwedge_{i \in TER} A(y_i) \equiv \forall x\, A(x)} \qquad \forall y_n \in TER$$

QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

Introduzione:

$$\exists i \quad \frac{A[t/x]}{\exists x\, A(x)}$$

Spiegazione: se A vale per un generico elemento t allora esiste un testimone e posso concludere $\exists x\, A(x)$

Eliminazione: più difficile!

N.B. come il $\forall$ è la generalizzazione di $\wedge$ $\exists$ è la generalizzazione di $\vee$ quindi la regola di eliminazione sarà simile a quella di $\vee e$

$$\exists e\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \overline{F[y/x]}^{\,1} \\ \nabla \\ C\end{array} \qquad \exists x\, F(x)^{\,1}}{C}$$

Scaricamento

Condizione: y non compare libera in C né in nessuna delle foglie non cancellate in Γ

Spiegazione: Se posso dimostrare C per un qualunque y in F allora posso dedurre C senza bisogno di F

Come per la regola di eliminazione di $\vee$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, F(y_1) \\ \nabla \\ C\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Gamma, F(y_n) \\ \nabla \\ C\end{array} \qquad F(y_1) \vee \dots \vee F(y_n)}{C}$$

N.B. se C dipendesse da y nell'albero tutte le C sarebbero diverse fra loro $C(y_1) \dots C(y_n)$