Esame di Logica Matematica

28 Gennaio 2008

Regolamento

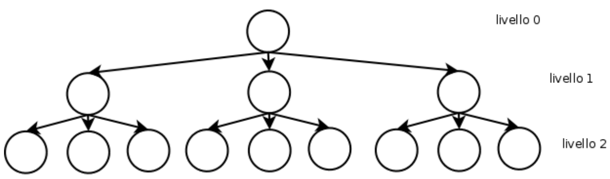
- Tempo a disposizione: ore 2,30.
- Lo studente dovrà indicare in alto a sinistra sulla prima pagina di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola ed e-mail.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri per induzione che dato un albero ternario completo il numero di nodi al livello n è 3^n.

   Sugg. Un albero completo è un foglia (albero con altezza 0) oppure un nodo che ha 3 figli (anch'essi alberi tutti e 3 della stessa altezza) in questo caso l'albero ha altezza 1 + l'altezza dei figli.

   Esempio:

   Albero ternario completo di altezza 2

   Soluzione:

   - Caso Base: Livello 0: $3^0 = 1$ ✓
   - Passo Induttivo: Per ipotesi induttiva ogni albero di altezza n ha 3^n foglie, voglio dimostrare che un albero di altezza $n+1$ ha 3^{n+1} foglie.

     Un albero di altezza $n+1$ è costituita dalla radice + 3 figli di altezza n. Ognuno dei 3 figli per ipotesi induttiva ha 3^n foglie, pertanto l'albero ha complessivamente $3 * 3^n = 3^{n+1}$ foglie. ✓

2. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che la seguente formula è valida:

$$\forall x \exists y \neg(A(x) \vee B(y)) \wedge \forall z(C(z) \rightarrow B(z)) \rightarrow \exists x \neg C(x)$$

Soluzione: Sia $F = \forall x \exists y \neg(A(x) \lor B(y)) \land \forall z(C(z) \to B(z))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B(y)]^{1}}{A(x)\lor B(y)} \quad [\neg(A(x)\lor B(y))]^{2}}{\bot}}{\neg B(y)}\,1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[F]^{3}}{\forall z(C(z)\to B(z))}}{C(y)\to B(y)} \quad [C(y)]^{4}}{B(y)}}{\bot}}{\neg C(y)}\,4}{\exists x\neg C(x)} \quad \dfrac{\dfrac{[F]^{3}}{\forall x\exists y\neg(A(x)\lor B(y)))}}{\exists y\neg(A(x)\lor B(y))}}{\exists x\neg C(x)}\,2}{F\to\exists x\neg C(x)}\,3
$$

3. Si dimostri usando il metodo di risoluzione che la formula dell'esercizio 2 è valida:

Soluzione: Clausole: $\{\neg A(w)\}$, $\{\neg B(f(x))\}$, $\{\neg C(z), B(z)\}$, $\{C(y)\}$
Risoluzione:

$$
\dfrac{\dfrac{\{\neg B(f(x))\} \quad \{\neg C(z), B(z)\}}{\{\neg C(f(x)\}}\,{\scriptstyle z=f(x)} \quad \{C(y)\}}{\Box}\,{\scriptstyle y=f(x)}
$$

4. Si traduca in un opportuno linguaggio al prim'ordine la seguente frase:
"Se nessun cantante è stonato e tutte le persone stonate sono fastidiose allora qualche persona fastidiosa non è un cantante."

Soluzione : $C(x) = \{x \mid x \text{ è un cantante}\}$,
$S(x) = \{x \mid x \text{ è stonato}\}$,
$F(x) = \{x \mid x \text{ è fastidioso}\}$

$$\neg\exists(C(x) \land S(x)) \land \forall x(S(x) \to F(x)) \to \exists x(F(x) \land \neg C(x))$$

5. È data la seguente formula:

$$\exists x(A(x) \lor B(x)) \land \forall x(A(x) \to C(x)) \land \forall x(B(x) \to C(f(x))) \to \forall x C(x)$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione: P è soddisfacibile, infatti:
$\mathcal{A} \models P$, $D^{\mathcal{A}} = \{0\}$, $A^{\mathcal{A}} = B^{\mathcal{A}} = C^{\mathcal{A}} = \emptyset$ e $f^{\mathcal{A}}(0) = 0$.
$\mathcal{B} \not\models P$, $D^{\mathcal{B}} = \{0, 1\}$, $A^{\mathcal{B}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{B}} = \{1\}$, $C^{\mathcal{B}} = \{0\}$ e $f^{\mathcal{B}}(0) = 0$, $f^{\mathcal{B}}(1) = 0$.