Esame di Logica Matematica

26 Settembre 2008

Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2,00.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola ed e-mail.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:
$$\forall x \neg(A(x) \land B(x)), \forall x(C(x) \to B(x)) \models \neg\exists x(A(f(x)) \land C(f(x)))$$

   Soluzione: Sia $F = A(f(x)) \land C(f(x))$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overline{F}^{\,1}$}
\UnaryInfC{$C(f(x))$}
\AxiomC{$\forall x(C(x) \to B(x))$}
\UnaryInfC{$C(f(x)) \to B(f(x))$}
\BinaryInfC{$B(f(x))$}
\AxiomC{$\overline{F}^{\,1}$}
\UnaryInfC{$A(f(x))$}
\BinaryInfC{$A(f(x)) \land B(f(x))$}
\AxiomC{$\forall x \neg(A(x) \land B(x))$}
\UnaryInfC{$\neg(A(f(x)) \land B(f(x)))$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$\overline{\exists x F}^{\,2}$}
\RightLabel{1}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\neg\exists x(A(f(x)) \land C(f(x)))$}
\end{prooftree}
$$

2. Si dimostri usando il metodo di risoluzione vale la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

   Soluzione: Clausole: $\{\neg A(x), \neg B(x)\}$ $\{\neg C(y), B(y)\}$ $\{A(f(c))\}$ $\{C(f(c))\}$

   Risoluzione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\{\neg A(x), \neg B(x)\}$}
\AxiomC{$\{A(f(c))\}$}
\RightLabel{$\scriptstyle x = f(c)$}
\BinaryInfC{$\{\neg B(f(c))\}$}
\AxiomC{$\{\neg C(y), B(y)\}$}
\AxiomC{$\{C(f(c))\}$}
\RightLabel{$\scriptstyle y = f(c)$}
\BinaryInfC{$\{B(f(c))\}$}
\BinaryInfC{$\Box$}
\end{prooftree}
$$

3. È data la seguente formula:

$$\exists x(\neg A(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow C(x, f(y)))) \rightarrow \forall y(B(y) \rightarrow \exists x(\neg A(x) \rightarrow C(x, f(y))))$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione: La formula è soddisfacibile infatti:

$\mathcal{A} \models P \quad D^{\mathcal{A}} = \{0\} \quad A^{\mathcal{A}} = B^{\mathcal{A}} = C^{\mathcal{A}} = \emptyset \quad f^{\mathcal{A}}(0) = 0$

$\mathcal{B} \not\models P \quad D^{\mathcal{B}} = \{0, 1\} \quad A^{\mathcal{B}} = B^{\mathcal{B}} = \{0\} \quad C^{\mathcal{B}} = \emptyset \quad f^{\mathcal{B}}(0) = 0 \quad f^{\mathcal{B}}(1) = 1$

4. Dato il linguaggio al prim'ordine contenente il simbolo di costante 2, il simbolo di funzione $*$ ed i predicati $\{=, P\}$ dove $=$ è l'uguaglianza e $P(x)$ viene interpreato come x è pari Si dia un'opportuna traduzione della seguente frase:

Tutti i numeri che sono multipli almeno di 2 sono pari

N.B. Eventuali nuovi predicati devono essere definiti secondo il linguaggio fornito

Soluzione:

$$\forall x(\exists y(y = 2 \wedge \exists z(x = y * z)) \rightarrow P(x))$$

5. Si dimostri che sussiste la seguente eguaglianza:

$$\sum_{i=m}^{n} i = \frac{(n-m+1)(n+m)}{2}$$

Soluzione:

- Caso base: $n = m$ allora banalmente $\sum_{i=m}^{m} i = m = \dfrac{(m-m+1)(m+m)}{2}$ ✓
- Passo induttivo: $n > m$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=m}^{n} i = && \text{svolgendo i termini della sommatoria} && (1)\\
&= \sum_{i=m}^{n-1} i + n = && \text{per ipotesi induttiva} && (2)\\
&= \frac{(n-1-m+1)(n-1+m)}{2} + n = && \text{calcolando ...} && (3)\\
&= \frac{n^2 - nm + mn - m^2 + m + n}{2} = && \text{calcolando ...} && (4)\\
&= \frac{n(n-m+1) + m(n-m+1)}{2} = && \text{calcolando ...} && (5)\\
&= \frac{(n-m+1)(n+m)}{2} && \checkmark && (6)
\end{aligned}$$