

# Esame di Logica Matematica

02 Luglio 2009

## Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2:00.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

## Esercizi

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:

$$\forall x \exists y \neg(A(x) \vee B(y)) \wedge \forall z(C(z) \rightarrow B(z)) \vDash \exists x \neg C(x).$$

2. Si dimostri usando il metodo di risoluzione che vale la seguente conseguenza logica:

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y C(x, f(y))), \exists x(A(x) \vee B(x)), \forall x(B(x) \rightarrow \forall z(C(z, x) \wedge C(x, z))) \vDash \exists x \exists v C(x, v)$$

3. Si consideri la seguente formula su un linguaggio che include due simboli di predicato binari  $R$  e  $=$ :

$$P = \forall x \exists y_1 \exists y_2 (R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2).$$

Nell'ipotesi che il simbolo  $\neq$  sia interpretato in modo canonico come la negazione dell'identità, si diano:

- (a) un modello con dominio infinito di  $P$ ;
  - (b) un modello con dominio finito di  $P$ ;
  - (c) un'interpretazione che falsifica  $P$ .
4. È data una nuova operazione sulle formule  $\bar{\cdot} : FBF \rightarrow FBF$  tale che  $\forall A, P, Q \in FBF$ 
    - $\bar{\bar{A}} = A$  se  $A$  è una proposizione atomica
    - $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$
    - $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$
    - $\overline{P \rightarrow Q} = \bar{P} \rightarrow \bar{Q}$
    - $\overline{\neg P} = \neg \bar{P}$
    - (a) Si determini  $\overline{\neg A \wedge B \rightarrow \neg(B \wedge C)}$ .
    - (b) È vero che  $\overline{\bar{P}} = P \forall P \in FBF$ ? Se sì, si fornisca una dimostrazione. Se no, un controesempio.