

Esame di Logica Matematica

02 Luglio 2009

Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2:00.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:

$$\forall x \exists y \neg(A(x) \vee B(y)) \wedge \forall z(C(z) \rightarrow B(z)) \vDash \exists x \neg C(x).$$

2. Si dimostri usando il metodo di risoluzione che vale la seguente conseguenza logica:

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y C(x, f(y))), \exists x(A(x) \vee B(x)), \forall x(B(x) \rightarrow \forall z(C(z, x) \wedge C(x, z))) \vDash \exists x \exists v C(x, v)$$

3. Si consideri la seguente formula su un linguaggio che include due simboli di predicato binari R e $=$:

$$P = \forall x \exists y_1 \exists y_2 (R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2).$$

Nell'ipotesi che il simbolo \neq sia interpretato in modo canonico come la negazione dell'identità, si diano:

- (a) un modello con dominio infinito di P ;
- (b) un modello con dominio finito di P ;
- (c) un'interpretazione che falsifica P .

4. È data una nuova operazione sulle formule $\bar{\cdot} : FBF \rightarrow FBF$ tale che $\forall A, P, Q \in FBF$

- $\bar{\bar{A}} = A$ se A è una proposizione atomica
- $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$
- $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$
- $\overline{P \rightarrow Q} = \bar{P} \rightarrow \bar{Q}$
- $\overline{\bar{P}} = P$

- (a) Si determini $\overline{\bar{\neg A \wedge B} \rightarrow \bar{\neg(B \wedge C)}}$.

- (b) È vero che $\overline{\bar{P}} = P \forall P \in FBF$? Se sì, si fornisca una dimostrazione. Se no, un controesempio.