Esame di Logica Matematica

19 Giugno 2008

Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola ed e-mail.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Dimostrare (per induzione) che data una formula proposizionale F costruita usando solo atomi ed i connettivi $\wedge$ e $\vee$, sussiste la seguente proprietà P:

   $$\text{P: Numero di Atomi} = \text{Numero di Connettivi} + 1$$

   Soluzione:

   $$F ::= A \mid F_1 \wedge F_2 \mid F_1 \vee F_2$$

   Una formula è un atomo, oppure l'unione di due sottoformule F_1 ed F_2 tramite i connettivi $\wedge$ e $\vee$.

   Dimostro per induzione sulla struttura della formula:

   - Caso Base: la formula è un atomo: P è banalmente verificata ✓.
   - Passo Induttivo: Per ipotesi induttiva P vale su tutte le sottoformule di F.

     Caso 1: sia $F = F_1 \wedge F_2$ pertanto il numero di atomi di F è uguale al numero di atomi di F_1 più il numero di atomi di F_2, per ipotesi induttiva si ha che il numero di atomi di F_1 è uguale al numero di connettivi di F_1 + 1, analogamente per F_2 il numero di atomi è pari al numero dei connettivi in F_2 + 1. Riassumendo il numero di atomi di F è pari al numero di connettivi di F_1 + il numero di connettivi di F_2 + 2. Inoltre si osservi che il numero di connettivi di F è uguale al numero di connettivi di F_1 + il numero di connettivi di F_2 + 1, pertanto si conclude che il numero di atomi di F è pari al numero di connettivi di F + 1 da cui la tesi.

     Caso 2: sia $F = F_1 \vee F_2$ pertanto il numero di atomi di F è uguale al numero di atomi di F_1 più il numero di atomi di F_2, per ipotesi induttiva si ha che il numero di atomi di F_1 è uguale al numero di connettivi di F_1 + 1, analogamente per F_2 il numero di atomi è pari al numero dei connettivi in F_2 + 1. Riassumendo il numero di atomi di F è pari al numero di connettivi di F_1 + il numero di connettivi di F_2 +

2. Inoltre si osservi che il numero di connettivi di F è uguale al numero di connettivi di F_1 + il numero di connettivi di F_2 + 1, pertanto si conclude che il numero di atomi di F è pari al numero di connettivi di F + 1 da cui la tesi. ✓

2. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:

$$\exists x(A(x) \to B(f(x))), \exists x(C(x) \to D(x)) \models (\forall x \neg B(x) \lor \forall x \neg D(x)) \to \neg \forall x(A(x) \land C(x))$$

Soluzione: Alb 1:

$$\exists x(A(x) \to B(f(x))), \forall x(A(x) \land C(x)), \forall x \neg B(x) \models \bot$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(A(x) \land C(x))}{A(x) \land C(x)}}{A(x)} \qquad \dfrac{}{A(x) \to B(f(x))}\,{}^{1}}{B(f(x))} \qquad \dfrac{\forall x \neg B(x)}{\neg B(f(x))}}{\bot} \qquad \exists x(A(x) \to B(f(x)))}{\bot}\,{}^{1}$$

Alb 2:

$$\exists x(C(x) \to D(x)), \forall x(A(x) \land C(x)), \forall x \neg D(x) \models \bot$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(A(x) \land C(x))}{A(x) \land C(x)}}{C(x)} \qquad \dfrac{}{C(x) \to D(x)}\,{}^{1}}{D(x)} \qquad \dfrac{\forall x \neg D(x)}{\neg D(x)}}{\bot} \qquad \exists x(C(x) \to D(x))}{\bot}\,{}^{1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\exists x(A(x) \to B(f(x))) \\ \forall x(A(x) \land C(x))_{(2)} \\ \forall x \neg B(x)_{(1)}\end{array}}{\bot}\,\text{Alb1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\exists x(C(x) \to D(x)) \\ \forall x(A(x) \land C(x))_{(2)} \\ \forall x \neg D(x)_{(1)}\end{array}}{\bot}\,\text{Alb2} \qquad \dfrac{}{\forall x \neg B(x) \lor \forall x \neg D(x)}\,{}^{3}}{\bot}\,{}^{1}}{\neg \forall x(A(x) \land C(x))}\,{}^{2}}{(\forall x \neg B(x) \lor \forall x \neg D(x)) \to (\neg \forall x(A(x) \land C(x)))}\,{}^{3}$$

3. Si dimostri usando il metodo di risoluzione che sussiste la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

Soluzione: Clausole: $\{\neg A(a),\ B(f(a))\}$, $\{\neg C(b),\ D(b)\}$, $\{\neg B(y),\ \neg D(z)\}$, $\{A(v)\}$, $\{C(w)\}$

Risoluzione:

$$
w=b\,\dfrac{z=b\,\dfrac{y=f(a)\,\dfrac{v=a\,\dfrac{\{\neg A(a), B(f(a))\} \qquad \{A(v)\}}{\{B(f(a))\}} \qquad \{\neg B(y), \neg D(z)\}}{\{\neg D(z)\}} \qquad \{\neg C(b), D(b)\}}{\{\neg C(b)\}} \qquad \{C(w)\}}{\Box}
$$

4. È data la seguente formula:

$$\forall x(\neg A(x) \to \exists y B(y)) \land \neg \forall x A(x) \land \neg \exists x B(x)$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione: P è contraddittoria infatti:

$$\forall x(\neg A(x) \to \exists y B(y)) \land \neg \forall x A(x) \land \neg \exists x B(x) \models \bot$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{\forall x(\neg A(x) \to \exists y B(y))}}{\neg A(x) \to \exists y B(y)} \qquad \dfrac{}{\neg A(x)}^{1}}{\exists y B(y)} \qquad \dfrac{P}{\neg \exists x B(x)}}{\bot}}{A(x)}^{1}}{\forall x A(x)} \qquad \dfrac{P}{\neg \forall x A(x)}}{\bot}
$$

5. (FACOLTATIVO) Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e con il solo simbolo di uguaglianza come predicato. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard, si dia una definizione per il predicato $P(x)$ la cui semantica è: "x è dispari ed è un quadrato perfetto". Si possono usare meta-definizioni (predicati) ausiliarie.

Soluzione

$$1 = succ(0) \qquad\qquad 2 = succ(1)$$

$$D(x) = \exists y(x = 2 * y + 1)(\text{x è dispari})$$

$$Q(x) = \exists y(x = y * y)(\text{x è un quadrato perfetto})$$

$$P(x) = D(x) \land Q(x)$$