

Esame di Logica Matematica

17 Febbraio 2009

Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2,00.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola ed e-mail.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[A(x) \rightarrow B(f(x))], \forall x[B(x) \rightarrow B(f(x))] \vdash \forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists yB(f(f(y)))$$

2. Si dimostri usando il metodo di risoluzione vale la conseguenza logica dell'esercizio precedente.
3. È data la formula:

$$\forall x(\neg A(x, f(x)) \rightarrow \neg B(x)) \wedge \forall x(B(x) \rightarrow \forall x\exists y(A(x, y)))$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano un'interpretazione in cui P è vera ed una in cui P è falsa.

4. Si dia la regola di eliminazione dell'esiste della deduzione naturale e se ne commenti il significato.
5. Si consideri un linguaggio al prim'ordine con un solo simbolo di funzione binaria f (senza costanti). Si dia la definizione di termine e si dimostri che dato un termine t , se indichiamo con $\#v[t]$ il numero di occorrenze delle variabili in t (ad esempio, $\#v[f(x, f(y, y))] = 3$), e con $\#f[t]$ il numero di occorrenze del simbolo f in t (ad esempio, $\#f[f(x, f(y, y))] = 2$) allora per ogni termine t , $\#v[t] \geq \#f[t] + 1$.