Esame di Logica Matematica

11 Febbraio 2008

Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2,30.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola ed e-mail.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri per induzione che sussiste la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$$

Soluzione:

- Caso Base: $n = 1$, $1 \geq 1$ ✓
- Passo Induttivo: Per ipotesi induttiva $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$, voglio dimostrare che la formula vale per $n+1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \quad \text{per ipotesi induttiva}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \quad \text{raccogliendo a fattor comune}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{n}{(n+1)^2} \geq \quad \text{È immediato dimostrare che } \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{(n+2)}$$

✓

2. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che la seguente formula è valida:

$$\forall x \forall y \forall z((A(x,y) \land A(y,z)) \to A(x,z)), \forall x \neg A(x,x) \vdash \forall x \forall y(A(x,y) \to \neg A(y,x))$$

Soluzione:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x \forall y \forall z((A(x,y) \land A(y,z)) \to A(x,z))$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z((A(x,y) \land A(y,z)) \to A(x,z))$}
\UnaryInfC{$\forall z((A(x,y) \land A(y,z)) \to A(x,z))$}
\UnaryInfC{$(A(x,y) \land A(y,x)) \to A(x,x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A(x,y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$A(y,x)$}
\BinaryInfC{$A(x,y) \land A(y,x)$}
\BinaryInfC{$A(x,x)$}
\AxiomC{$\forall x \neg A(x,x)$}
\UnaryInfC{$\neg A(x,x)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\neg A(y,x)$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A(x,y) \to \neg A(y,x)$}
\UnaryInfC{$\forall y(A(x,y) \to \neg A(y,x))$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y(A(x,y) \to \neg A(y,x))$}
\end{prooftree}$$

3. Si dimostri usando il metodo di risoluzione che la seguente formula è valida:

$$\exists x(A(x) \land B(x)) \land \forall y(B(y) \to C(y)) \to \exists z(A(z) \land C(z))$$

Soluzione: Clausole: $\{A(a)\}$, $\{B(a)\}$, $\{\neg B(y), C(y)\}$, $\{\neg A(z), \neg C(z)\}$
Risoluzione:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\{B(a)\}$}
\AxiomC{$\{\neg B(y), C(y)\}$}
\RightLabel{$y = a$}
\BinaryInfC{$\{C(a)\}$}
\AxiomC{$\{\neg A(z), \neg C(z)\}$}
\RightLabel{$z = a$}
\BinaryInfC{$\{\neg A(z)\}$}
\AxiomC{$\{A(a)\}$}
\BinaryInfC{$\square$}
\end{prooftree}$$

4. Si traduca in un opportuno linguaggio al prim'ordine la seguente frase:
"Se nessun amico di Marco vive a Milano e qualche ragazza è amica di Marco allora qualche ragazza non vive a Milano."

Soluzione : $A(x) = \{x \mid x$ è amico di Marco$\}$,
$M(x) = \{x \mid x$ vive a Milano$\}$,
$R(x) = \{x \mid x$ è una ragazza$\}$

$$\neg \exists x(A(x) \land M(x)) \land \exists x(R(x) \land A(x)) \to \exists x(R(x) \land \neg M(x))$$

5. È data la seguente formula:

$$\forall x(A(x) \to B(f(x))) \land \exists y \neg B(f(y)) \to \forall y \neg A(y)$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione: P è soddisfacibile, infatti:

$\mathcal{A} \models P$, $D^{\mathcal{A}} = \{0\}$, $A^{\mathcal{A}} = B^{\mathcal{A}} = \emptyset$ e $f^{\mathcal{A}}(0) = 0$.

$\mathcal{B} \not\models P$, $D^{\mathcal{B}} = \{0, 1\}$, $A^{\mathcal{B}} = \{0\}$, $B^{\mathcal{B}} = \{0\}$, e $f^{\mathcal{B}}(0) = 0$, $f^{\mathcal{B}}(1) = 1$.