

Esame di Logica Matematica

06 Febbraio 2009

Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2,00.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola ed e-mail.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[P(x) \rightarrow \exists yQ(x, f(y))], \forall x\forall y[Q(x, y) \rightarrow Q(x, f(y))], P(c) \vDash \exists x\exists yQ(x, f(f(y)))$$

2. Si dimostri usando il metodo di risoluzione vale la conseguenza logica dell'esercizio precedente.
3. È data la formula:

$$P = \forall x\forall y[A(x, y) \rightarrow (A(x, f(y)) \wedge A(g(x), y))] \rightarrow A(g(g(c)), f(c))$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano un'interpretazione in cui P è vera ed una in cui P è falsa.

4. Si definisca un opportuno linguaggio al prim'ordine e si dia una traduzione della seguente frase:

Fra quelli che hanno studiato logica c'è qualcuno che supererà l'esame.

5. Si dia la definizione di termine e si dimostri che se t è un termine tale che $FV(t) = \{y_1, \dots, y_n\}$ ($FV(t)$ = variabili libere del termine t), \mathcal{A} è una struttura, e per tutti gli ambienti φ_1^A, φ_2^A tali che $\varphi_1^A(y_i) = \varphi_2^A(y_i)$, per ogni $i \in [1..n]$ allora $\llbracket t \rrbracket_{\varphi_1}^A = \llbracket t \rrbracket_{\varphi_2}^A$.