

Soluzione: Predicati ausiliari:

x è pari: $Pari(x) := \exists y(x = 2 * y)$ dove $2 = succ(succ(0))$

x è dispari: $Dispari(x) := \exists y(x = 2 * y + 1)$ dove $1 = succ(0)$

$P(x) = Pari(x) \rightarrow \exists y \exists z (\neg y = z) \wedge Dispari(y) \wedge Dispari(z) \wedge (x = y + z)$

4. È data la seguente formula:

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow C(x)) \wedge \forall x(B(x) \rightarrow C(f(x))) \rightarrow \forall x C(x)$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione: P è soddisfacibile, infatti:

$$\mathcal{A} \models P, D^{\mathcal{A}} = \{0\}, f^{\mathcal{A}}(0) = 0A^{\mathcal{A}} = B^{\mathcal{A}} = C^{\mathcal{A}} = \{0\}$$

e

$$\mathcal{B} \not\models P, D^{\mathcal{B}} = \{0, 1\}, f^{\mathcal{B}}(0) = f^{\mathcal{B}}(1) = 0A^{\mathcal{B}} = \{0\}, B^{\mathcal{A}} = \emptyset C^{\mathcal{B}} = \{0\}$$