Esame di Logica Matematica

4 Luglio 2008

Regolamento

- Tempo a disposizione: ore 2,00.
- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola ed e-mail.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:
$$\exists x(\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y))), \forall x(\neg C(x) \to A(f(x))) \models \exists x A(x)$$

Soluzione: Alb 1:
$$\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y)) \models \neg C(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y))}{\forall y(C(x) \to A(y))}}{C(x) \to A(x)} \qquad \dfrac{}{C(x)}\,{}^{1}}{A(x)} \qquad \dfrac{\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y))}{\neg A(x)}}{\perp}}{\neg C(x)}\,{}^{1}$$

Alb 2:
$$\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y)), \forall x(\neg C(x) \to A(f(x))) \models \exists x A(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y))}{\neg C(x)}\,\text{Alb 1} \qquad \dfrac{\forall x(\neg C(x) \to A(f(x)))}{\neg C(x) \to A(f(x))}}{A(f(x))}}{\exists x A(x)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y))_{(1)} \\ \forall x(\neg C(x) \to A(f(x)))\end{matrix}}{\exists x A(x)}\,\text{Alb 2} \qquad \exists x(\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y)))}{\exists x A(x)}\,{}^{1}$$

2. Si dimostri usando il metodo di risoluzione che la formula seguente è valida:

$$\exists x(\neg A(x) \land \forall y(C(x) \to A(y))) \land \forall x(\neg C(x) \to A(f(x))) \to \exists x A(x)$$

Soluzione: Clausole: $\{\neg A(x)\}$, $\{C(y), A(f(y))\}$, $\{\neg A(c)\}$, $\{\neg C(c), A(z)\}$
Risoluzione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{C(y), A(f(y))\} \qquad \{\neg A(x)\}}{\{C(y)\}}\, x = f(y) \qquad \{\neg C(c), A(z)\}}{\{A(z)\}}\, y = c \qquad \{\neg A(c)\}}{\square}\, z = c$$

3. Sia F una formula ben formata, $|F|_($ il numero di parentesi aperte ("(") e $|F|_)$ il numero di parentesi chiuse (")") che compaiono in essa. Dimostrare che per ogni formula ben formata F il numero di parentesi aperte è uguale al numero di parentesi chiuse cioé: $|F|_(= |F|_)$.

Soluzione: Una formula ben formata è:

- un atomo
- $(F_1 \text{ op } F_2)$ con op $\in \{\land, \lor, \to\}$
- $(\neg F_1)$

Dimostro per induzione sulla struttura di F

- Caso Base: la formula è un atomo: banalmente verificata ✓.
- Passo Induttivo: Per ipotesi induttiva il numero di parentesi aperte è uguale al numero di parentesi chiuse per tutte le sottoformule di F.
  Caso 1: $F = (F_1 \text{ op } F_2)$ allora $|F|_(= |F_1|_(+ |F_2|_(+ 2$ che per ipotesi induttiva è uguale a $|F_1|_) + |F_2|_) + 2$ che corrisponde a $|F|_)$.
  Caso 2: $F = (\neg F_1)$ allora $|F|_(= |F_1|_(+ 2$ che per ipotesi induttiva è uguale a $|F_1|_) + 2$ che corrisponde a $|F|_)$.

4. È data la seguente formula:

$$\neg \exists x \exists y(A(x) \land B(x, y)) \to \forall x(A(x) \to \neg B(x, f(x)))$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione: La formula P è valida infatti:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle 1$}
\UnaryInfC{$B(x,f(x))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle 2$}
\UnaryInfC{$A(x)$}
\BinaryInfC{$A(x)\wedge B(x,f(x))$}
\UnaryInfC{$\exists y(A(x)\wedge B(x,y))$}
\UnaryInfC{$\exists x\exists y(A(x)\wedge B(x,y))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\scriptstyle 3$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\exists y(A(x)\wedge B(x,y))$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\scriptstyle 1$}
\UnaryInfC{$\neg B(x,f(x))$}
\RightLabel{$\scriptstyle 2$}
\UnaryInfC{$A(x)\to\neg B(x,f(x))$}
\UnaryInfC{$\forall x(A(x)\to\neg B(x,f(x)))$}
\RightLabel{$\scriptstyle 3$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\exists y(A(x)\wedge B(x,y))\to\forall x(A(x)\to\neg B(x,f(x)))$}
\end{prooftree}
$$