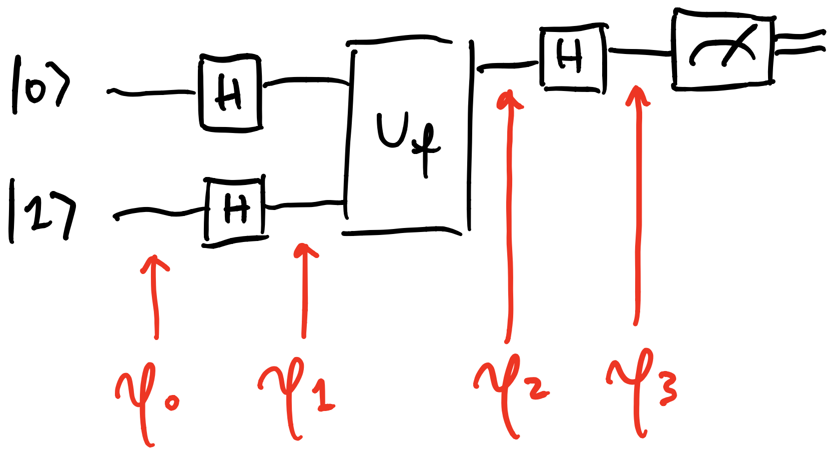
ALGORITMO DI DEUTSCH



$$U_f |x\rangle|y\rangle = |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$$

$$H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- CERCHIAMO DI CAPIRE COME SI COMPORTI U_f SU STATI NELLA FORMA

$$|b\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \qquad b \in \{0, 1\}$$

UN TALE STATO SI PUÒ ESPRIMERE COME

$$\frac{|b\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|b\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

APPLICANDO U_f A QUESTO STATO, OTTENIAMO

$$\frac{|b\rangle|0 \oplus f(b)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|b\rangle|1 \oplus f(b)\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{|b\rangle|f(b)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|b\rangle|\neg f(b)\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= |b\rangle \left(\frac{|f(b)\rangle - |\neg f(b)\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \psi$$

ORA:

- SE $f(b)=0$, ALLORA

$$\psi = |b\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^{f(b)}|b\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

- SE $f(b)=1$, ALLORA

$$\psi = |b\rangle\left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = -|b\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= (-1)^{f(b)}|b\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

IN ALTRE PAROLE L'APPLICAZIONE DI U_f A $|b\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ PRODUCE L'OUTPUT

$$(-1)^{f(b)}|b\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

ANALIZZIAMO GLI STATI $\psi_0, \dots, \psi_3$

$$\psi_0 = |0\rangle|1\rangle$$

$$\psi_1 = (H|0\rangle)(H|1\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

QUESTI DUE STATI SONO NELLA FORMA

$$|b\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\psi_2 = \frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}}|0\rangle\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{(-1)^{f(1)}}{\sqrt{2}}|1\rangle\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{(-1)^{f(0)}|0\rangle+(-1)^{f(1)}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (-1)^{f(0)}\left(\frac{|0\rangle+(-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

NEL DETERMINARE ψ_3, CONVIENE DISTINGUERE DUE CASI

- SE f È COSTANTE $(f(0)=f(1))$ ALLORA $f(0)\oplus f(1)=0$, E QUINDI LO STATO ψ_2 SARÀ

$$(-1)^{f(0)}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

DI CONSEGUENZA, ψ_3 SARÀ

$$(-1)^{f(0)} \, |0\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

E LA MISURA DEL PRIMO QUBIT PRODURRÀ 0.

- SE f È BILANCIATA, ALLORA $f(0) \oplus f(1) = 1$, E LO STATO ψ_2 SARÀ

$$(-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

E DOPO L'APPLICAZIONE DI HADAMARD OTTENIAMO PROPRIO

$$\psi_3 = (-1)^{f(0)} \, |1\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$