

Ottimizzazione

Corso di Laurea in Informatica

Terza Parte

Ugo Dal Lago



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

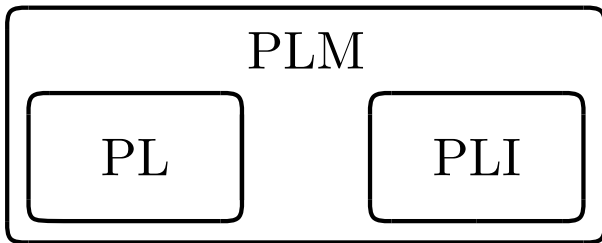
inria
informatiques mathématiques

Anno Accademico 2017-2018

Sezione 1

Geometria Della Programmazione Lineare

La Programmazione Lineare



La Programmazione Lineare



PL

Un Esempio

$$\max x + y$$

$$x \geq 0$$

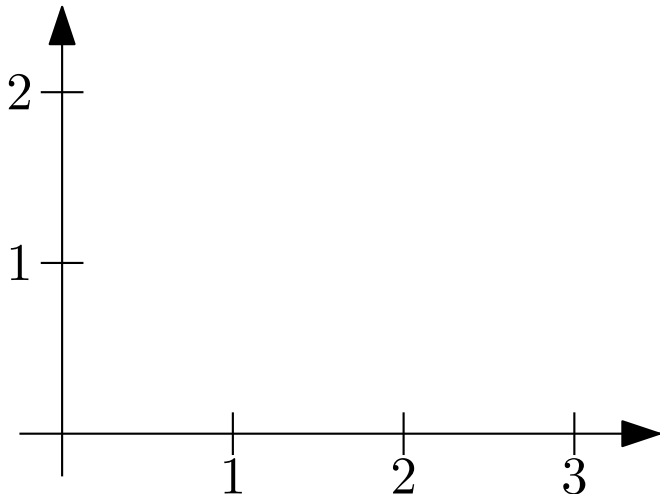
$$x \leq 3$$

$$x + 2y \geq 1$$

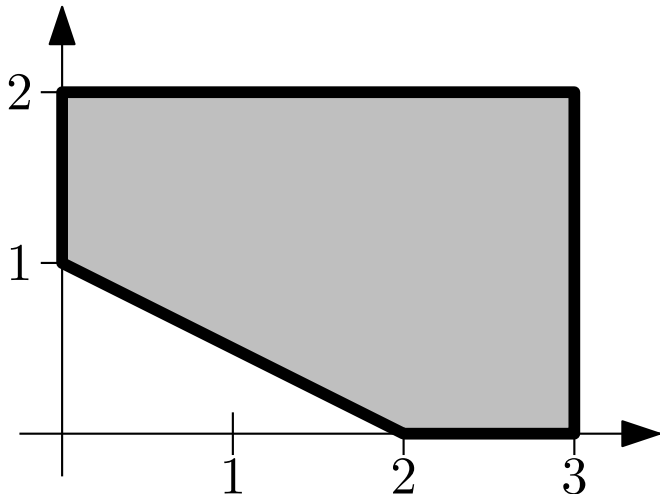
$$y \leq 2$$

$$y \geq 0$$

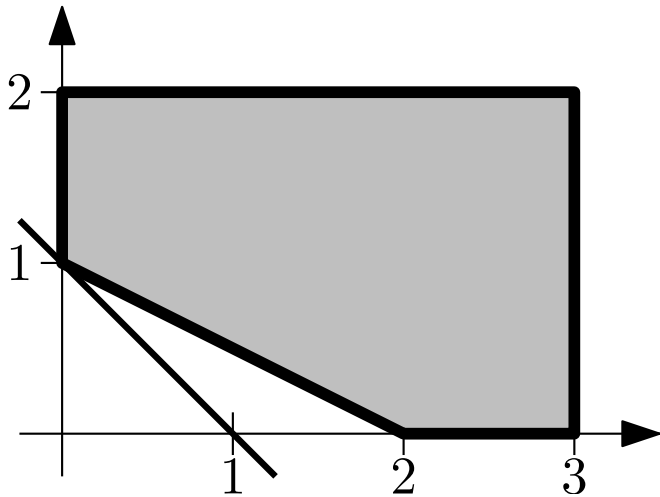
Un Esempio



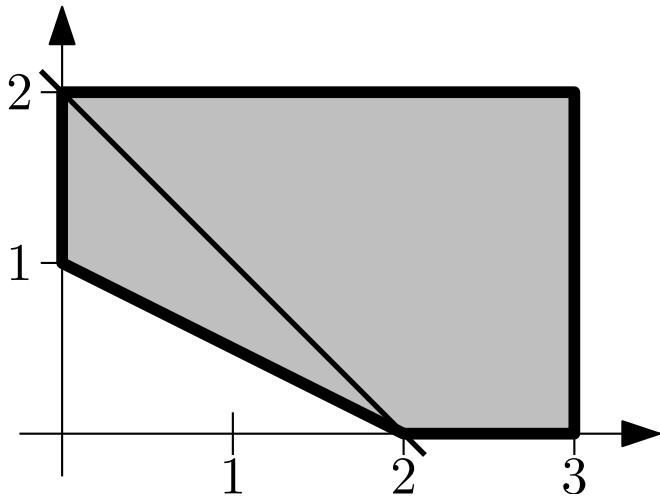
Un Esempio



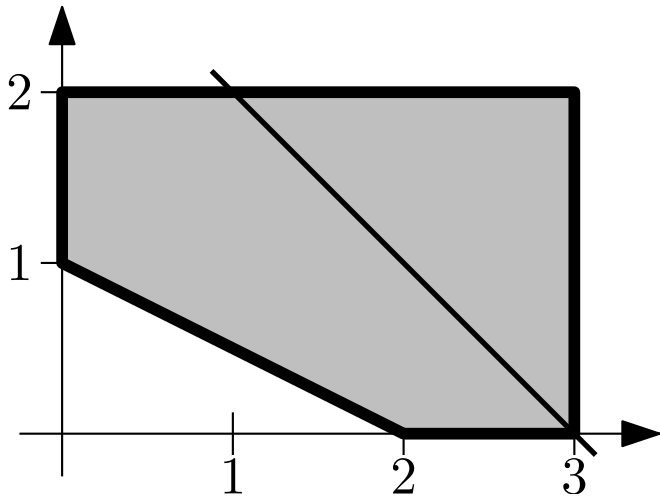
Un Esempio



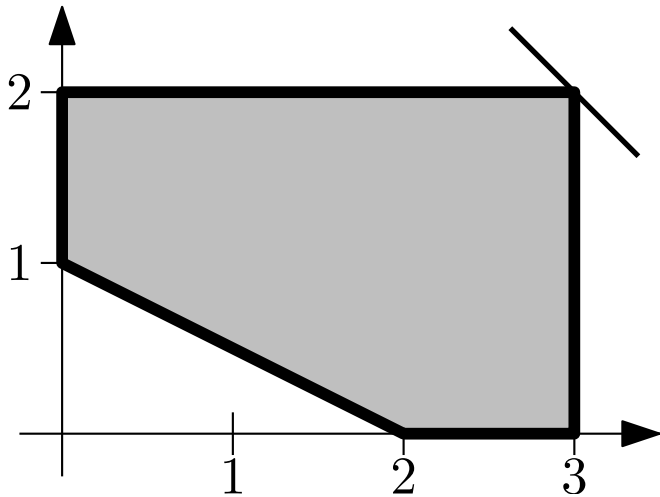
Un Esempio



Un Esempio



Un Esempio



Restringere lo Spazio di Ricerca

- ▶ Lo spazio di ricerca, nei problemi PL, è in linea di principio **infinito**.
 - ▶ Ha addirittura la cardinalità del continuo.
- ▶ L'esempio precedente ci mostra, però, che lo spazio di ricerca può essere *in qualche caso* ridotto ad un insieme **finito**, ossia l'insieme dei vertici del poliedro che definisce la regione ammissibile.
 - ▶ Il ragionamento sottostante ha natura essenzialmente geometrica, intuitiva.

Restringere lo Spazio di Ricerca

- ▶ Lo spazio di ricerca, nei problemi PL, è in linea di principio **infinito**.
 - ▶ Ha addirittura la cardinalità del continuo.
- ▶ L'esempio precedente ci mostra, però, che lo spazio di ricerca può essere *in qualche caso* ridotto ad un insieme **finito**, ossia l'insieme dei vertici del poliedro che definisce la regione ammissibile.
 - ▶ Il ragionamento sottostante ha natura essenzialmente geometrica, intuitiva.
- ▶ La domanda cui cercheremo di dare una risposta in questa prima sezione è la seguente: è possibile **generalizzare** quest'argomento al caso di problemi in $n > 2$ variabili.
 - ▶ Sarà necessario utilizzare l'algebra lineare in modo non triviale.

Nozioni Preliminari — I

▶ Iperpiano

- ▶ Insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ax = b\}$ delle soluzioni dell'equazione lineare $ax = b$, dove $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$.

▶ Semispazio

- ▶ Insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \leq b\}$ delle soluzioni dell'equazione lineare $ax \leq b$, dove $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$;
- ▶ Un iperpiano è il “confine” del corrispondente semispazio.

▶ Poliedro

- ▶ Intersezione P di un numero finito m di semispazi.
- ▶ Devono esistere una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^m$ tali che $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

▶ Insieme Convesso

- ▶ Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che tutti i punti che connettono $x, y \in C$ sono anch'essi in C , ossia

$$\forall x, y \in C \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

- ▶ Semispazi e poliedri sono insiemi convessi.

Nozioni Preliminari — II

- ▶ Se consideriamo il poliedro $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ (dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$) e fissiamo un qualunque sottoinsieme I di $\{1, \dots, m\}$, indichiamo:
 - ▶ Con \bar{I} il complementare $\{1, \dots, m\} - I$ di I .
 - ▶ Con A_I la sottomatrice di A ottenuta considerando solo le *righe* con indice in I
 - ▶ Con P_I il poliedro definito come segue:

$$\{x \mid A_I x = b_I \wedge A_{\bar{I}} x \leq b_{\bar{I}}\}.$$

- ▶ **Faccia**
 - ▶ Se I è tale che P_I non è vuoto, chiamiamo il poliedro P_I *faccia di P* .
 - ▶ Il numero di facce distinte di un poliedro $\{x \mid Ax \leq b\}$, dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, è al più pari a 2^m .
 - ▶ P stesso è una faccia, ovvero P_\emptyset .
 - ▶ Le facce proprie (cioè non banali) e massimali sono dette **faccette**.
 - ▶ La **dimensione** di una faccia è la dimensione del più piccolo sottospazio che la contenga.

Vertici

- ▶ Una faccia determinata da una matrice A_I di rango k ha dimensione $n - k$ o inferiore.
 - ▶ Può essere inferiore a causa delle equazioni in A_I , che possono contenere un'equazione implicita.
- ▶ Le facce determinate da matrici A_I di rango n hanno quindi, necessariamente, dimensione 0 e sono dette **vertici**.
 - ▶ Chiaramente, per l'ipotesi sul rango di A_I , l'equazione $A_I x = b_I$ ammette una e una sola soluzione.
 - ▶ D'altra parte, le facce sono sempre non-vuote.
- ▶ Le facce individuate da sottomatrici A_I di rango $n - 1$ hanno dimensione al più 1 e sono dette **spigoli**.

Soluzioni di Base

- ▶ Supponiamo che B sia tale che A_B sia matrice quadrata e invertibile. Allora:
 - ▶ B è detta **base**;
 - ▶ A_B è detta **matrice di base**;
 - ▶ $x_B = A_B^{-1}b_B$ è detta **soluzione di base**
- ▶ Una soluzione di base x_B tale che $x_B \in P$ è detta **ammissibile**, altrimenti **non ammissibile**.
- ▶ È facile rendersi conto che i vertici di P sono tutte e sole le sue soluzioni di base ammissibili.

Vincoli Attivi

- ▶ Se $x \in P$, allora i vincoli che vengono soddisfatti *come uguaglianze*, sono detti **attivi** in x .
- ▶ Indichiamo con $I(x)$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x :

$$I(x) = \{i \mid A_i x = b_i\}.$$

- ▶ Per ogni $J \subseteq I(x)$, l'insieme P_J è una faccia di P , e $P_{I(x)}$ è la faccia minimale tra esse.

Involuppi Convessi

- ▶ I poliedri possono essere rappresentati *per facce*, come abbiamo fatto fin'ora, ma anche *per punti* ossia facendo leva sull'insieme dei vertici.
- ▶ Dato un insieme di punti $X = \{x_1, \dots, x_s\} \subseteq \mathbb{R}^n$, l'**inviluppo convesso** di X è definito come l'insieme

$$\text{conv}(X) = \left\{ x = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \wedge \lambda_i \geq 0 \right\}$$

- ▶ Si può dimostrare che $\text{conv}(X)$ è il più piccolo insieme convesso che contiene tutti i punti di X .
- ▶ $\text{conv}(X)$ è un **politopo**, ossia un poliedro limitato, i cui vertici sono tutti in X .
 - ▶ Non tutti i poliedri sono politopi, perché i poliedri possono essere *illimitati*.

Coni Convessi

- ▶ Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto **cono** sse per ogni $x \in C$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vale che $\alpha x \in C$.
- ▶ I coni che siano anche insiemi convessi (detti **coni convessi**) sono caratterizzabili equivalentemente come gli insiemi C tali che

$$x, y \in C \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda x + \mu y \in C.$$

- ▶ Anche per i coni convessi esiste una rappresentazione basata sulle direzioni: dato un insieme $V = \{v_1, \dots, v_t\} \subset \mathbb{R}^n$, il **cono finitamente generato** da V è

$$\text{cono}(V) = \left\{ v = \sum_{i=1}^t \nu_i v_i \mid \nu_i \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

- ▶ Si può dimostrare che $\text{cono}(V)$ è il più piccolo cono convesso che contiene tutti i vettori di V .

Il Teorema di Motzkin

Teorema (Motzkin)

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro sse esistono X, V finiti tali che

$$P = \text{conv}(X) + \text{cono}(V)$$

- ▶ Nel contesto del Teorema di Motzkin, diremo che P è **generato** dai punti in X e dalla direzioni in V .
- ▶ Se P è poliedro generato dai punti di X e X è minimale, allora i suoi elementi sono tutti e soli i vertici di P .
- ▶ Analogamente: se P è poliedro generato dalle direzioni in V e V è minimale, allora i suoi elementi sono detti **raggi esterni** e corrispondono alle direzioni degli spigoli illimitati.

Due Rappresentazioni

- ▶ Due rappresentazioni:
 1. Poliedri come **intersezioni di semispazi**.
 2. Poliedri come **somma di un politopo e di un cono**.
- ▶ Le due rappresentazioni sono equivalenti (grazie al teorema di Motzkin) ma **non hanno** la stessa dimensione.
 - ▶ Prendiamo come controesempio il poliedro definito dall'insieme di vincoli

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \quad \cdots \quad 0 \leq x_n \leq 1$$

- ▶ I semispazi coinvolti sono $2n$.
- ▶ I vertici sono invece 2^n ; per rendersene conto basta osservare che i poliedri definiti sono gli *ipercubi* in \mathbb{R}^n di lato pari a 1 e con un vertice nell'origine. Tali ipercubi hanno effettivamente 2^n vertici.

Teorema

Sia $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ e siano $x_1, \dots, x_s, v_1, \dots, v_t \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_s\}) + \text{cono}(\{v_1, \dots, v_t\})$$

Allora il problema $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ ha ottimo finito sse $cv_j \leq 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, t\}$. In tal caso esiste inoltre un $k \in \{1, \dots, s\}$ tale che x_k è una soluzione ottima.

Dimostrazione.

Per il Teorema di Decomposizione abbiamo che il problema $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ è equivalente al seguente problema sulle variabili $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ e ν_1, \dots, ν_t :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx_i) + \sum_{j=1}^t \nu_j (cv_j) \\ & \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1; \quad \lambda_i \geq 0; \quad \nu_j \geq 0. \end{aligned}$$

Tale problema ha ottimo finito sse $cv_j \leq 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, t\}$. Infatti:

\implies Se fosse $cv_j > 0$ per qualche $j \in \{1, \dots, t\}$, allora si potrebbe pompare ν_j facendo crescere a piacimento la funzione obbiettivo.

\impliedby Supponiamo che $cv_j \leq 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, t\}$, e prendiamo un $y \in P$. Abbiamo che, se λ_i e ν_j sono i corrispondenti coefficienti del teorema di decomposizione,

$$\begin{aligned}cy &= \sum_{i=1}^s \lambda_i(cx_i) + \sum_{j=1}^t \nu_j(cv_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^s \lambda_i(cx_i) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i(cx_k) = cx_k\end{aligned}$$

dove x_k è il vettore tale che $x_k = \max\{cx_i \mid i = 1, \dots, s\}$. Quindi x_k è una soluzione ottima finita.



Massimizzare il Rango

- ▶ Spesso, nel seguito, faremo l'assunzione che in un problema $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$, il rango di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sia uguale a n , ovvero sia **massimo**.
- ▶ Che succede, quindi se la matrice A ha rango inferiore a n ?
 - ▶ Ciò può essere una conseguenza del fatto che $m < n$, ossia che ci sono pochi vincoli
 - ▶ Ma può anche essere che $m \geq n$ ma che due o più righe di A sono linearmente dipendenti.
- ▶ Che facciamo, per garantire che A abbia rango massimo?

Massimizzare il Rango

Teorema

Se il rango di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è strettamente inferiore a n , allora il problema $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ può essere ricondotto ad un diverso problema di programmazione lineare la cui matrice dei coefficienti si ottiene eliminando una colonna di A (e quindi eliminando una variabile).

Dimostrazione.

- ▶ Se il rango di A è inferiore a n , allora esiste almeno una colonna di A che è combinazione lineare delle altre, per esempio l'ultima:

$$A = (A', a_n); \quad c = (c', c_n); \quad x = (x', x_n) \quad A'\mu = a_n$$

dove $\mu \in \mathbb{R}^{n-1}$.

- ▶ Il nostro claim è quindi che il problema possa essere studiato tramite $\max\{c'x' \mid A'x' \leq b\}$, che chiamiamo problema ridotto.

- ▶ Si può verificare abbastanza facilmente che:
 - ▶ $x = (x', x_n)$ è ammissibile per il problema di partenza sse $x' + \mu x_n$ è ammissibile per il problema ridotto.
 - ▶ Se il problema ridotto è superiormente limitato, allora anche il vecchio lo è.
 - ▶ Se x' è soluzione ottima per il problema ridotto, allora ogni vettore $x(\alpha) = (x' - \alpha\mu, \alpha)$ è soluzione ottima per il problema di partenza.
- ▶ Di conseguenza, ci si può limitare a studiare il problema ridotto, per poi “tradurre” il risultato sul problema di partenza.

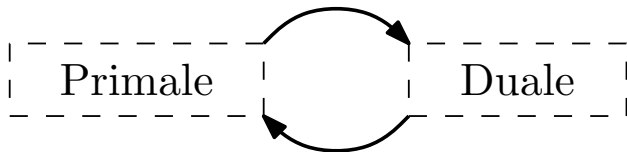


Sezione 2

Dualità

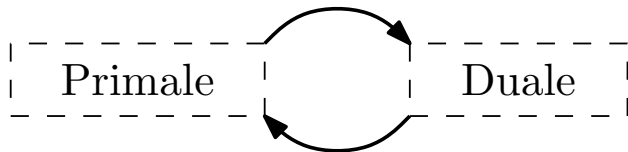
Perché la Dualità?

- ▶ La **teoria della dualità** è una branca dell'algebra lineare che risulta estremamente utile nella costruzione degli algoritmi per PL.
- ▶ In questa parte del corso, daremo solo uno *sguardo* alla teoria della dualità, senza addentrarci troppo nei dettagli.
- ▶ La teoria della dualità si basa sulla definizione di un'involuzione (ossia di una funzione inversa di sé stessa) che mappa ogni problema PL nel suo **duale**:



Perché la Dualità?

- ▶ La **teoria della dualità** è una branca dell'algebra lineare che risulta estremamente utile nella costruzione degli algoritmi per PL.
- ▶ In questa parte del corso, daremo solo uno *sguardo* alla teoria della dualità, senza addentrarci troppo nei dettagli.
- ▶ La teoria della dualità si basa sulla definizione di un'involuzione (ossia di una funzione inversa di sé stessa) che mappa ogni problema PL nel suo **duale**:



- ▶ **Esempio:** Problema di Trasporto.

Primale e Duale

- ▶ Lavoreremo con **coppie asimmetriche**:
 - ▶ *Primale*: $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$;
 - ▶ *Duale*: $\min\{yb \mid (yA = c) \wedge (y \geq 0)\}$.
- ▶ Esiste anche il concetto di **coppie simmetriche**:
 - ▶ *Primale*: $\max\{cx \mid (Ax \leq b) \wedge (x \geq 0)\}$;
 - ▶ *Duale*: $\min\{yb \mid (yA \geq c) \wedge (y \geq 0)\}$.
- ▶ È abbastanza facile dimostrare che il duale del duale è il primale.
 - ▶ Ad esempio, nel caso di coppia simmetrica, possiamo esprimere il duale come

$$\begin{aligned} & - \max\{y(-b) \mid (yA \geq c) \wedge (y \geq 0)\} \\ & = - \max\{(-b^T)y \mid ((-A^T)y \leq -c) \wedge (y \leq 0)\} \end{aligned}$$

il cui duale è

$$\begin{aligned} & - \min\{-cx \mid ((x(-A^T) \geq (-b)) \wedge (x \geq 0))\} \\ & = \max\{cx \mid Ax \leq b \wedge (x \geq 0)\} \end{aligned}$$

Teorema Debole di Dualità

Teorema

Se \bar{x} e \bar{y} sono soluzioni ammissibili per il primale e il duale, rispettivamente, allora $c\bar{x} \leq \bar{y}b$.

Dimostrazione.

Dimostriamo il teorema nel caso della coppia asimmetrica:

$$\left. \begin{array}{l} A\bar{x} \leq b \\ \bar{y}A = c, \bar{y} \geq 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \bar{y}A\bar{x} \leq \bar{y}b \\ \bar{y}A\bar{x} = c\bar{x} \end{array} \right\} \implies c\bar{x} \leq \bar{y}b$$

e nel caso della coppia simmetrica:

$$\left. \begin{array}{l} A\bar{x} \leq b, \bar{x} \geq 0 \\ \bar{y}A \geq c, \bar{y} \geq 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \bar{y}A\bar{x} \leq \bar{y}b \\ \bar{y}A\bar{x} \geq c\bar{x} \end{array} \right\} \implies c\bar{x} \leq \bar{y}b$$



Corollari del Teorema Debole di Dualità

Corollario

Se il primale è illimitato, allora il duale è vuoto.

Dimostrazione.

Se il primale è illimitato, allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione ammissibile x per il primale con $cx > M$. Ma quindi, se per assurdo ci fosse y ammissibile per il duale, troveremmo x ammissibile per il primale con $cx > yb$, in contrasto con il TdD. \square

Corollario

Se \bar{x} e \bar{y} sono soluzioni ammissibili per il primale e il duale, rispettivamente, e $c\bar{x} = \bar{y}b$, allora \bar{x} e \bar{y} sono soluzioni ottime.

Dimostrazione.

Se $c\bar{x} = \bar{y}b$ e \bar{x} non fosse ottima, troveremmo z ammissibile per il primale con $cz > c\bar{x}$ e quindi con $cz > \bar{y}b$, in contrasto con il TdD. \square

Direzioni Ammissibili — I

- ▶ Data una coppia asimmetrica, consideriamo una soluzione ammissibile \bar{x} per il primale, e chiediamoci se spostandoci lungo una direzione dell'iperspazio a partire da \bar{x} , si resta o meno nella regione ammissibile.
- ▶ Un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$ è detto **Direzione Ammissibile** se esiste $\bar{\lambda} > 0$ tale che $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\xi$ è ammissibile nel primale per ogni $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$.

Direzioni Ammissibili — II

Lemma

Il vettore ξ è direzione ammissibile per \bar{x} sse $A_{I(\bar{x})}\xi \leq 0$.

Dimostrazione.

- ▶ Un modo equivalente di definire ξ come direzione ammissibile è dire che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$A_i x(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \xi \leq b_i$$

- ▶ Osserviamo però che:
 - ▶ Se $i \in I(\bar{x})$, allora $A_i \bar{x} = b_i$, e quindi l'equazione è verificata se e solo se $\lambda A_i \xi \leq 0$.
 - ▶ se $i \notin I(\bar{x})$, allora l'equazione è verificata da qualunque ξ , purché λ sia piccolo a sufficienza.



Direzioni di Crescita

- ▶ Una direzione $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una **direzione di crescita** per \bar{x} se uno spostamento λ lungo ξ fa crescere il valore della funzione obiettivo, ossia se:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\xi > c\bar{x} \iff c\xi > 0$$

- ▶ La nozione di direzione di crescita, dunque, non dipende dal punto \bar{x} !
- ▶ Osserviamo che:
 - ▶ Se $c = 0$, allora la funzione obiettivo vale sempre 0 e quindi *tutte* le soluzioni ammissibili sono ottime.
 - ▶ Se $c \neq 0$, allora se esiste una direzione ammissibile per \bar{x} che sia anche di crescita, allora \bar{x} *non può essere* ottimo.

Sezione 3

L'Algoritmo del Simplexso

Algoritmo del Simpleso

- ▶ Prima di presentare l'algoritmo, conviene dare uno sguardo alla sua **struttura**.
- ▶ L'algoritmo procede **iterativamente**, visitando successivamente alcuni tra i vertici del poliedro che definisce l'insieme delle soluzioni ammissibili.
- ▶ Dato un vertice \bar{x} , si cerca prima di tutto di determinare se tale vertice sia o meno ad una **soluzione ottima**, cercando di determinare se esiste una soluzione \bar{y} per il duale con lo stesso valore della funzione obiettivo.
- ▶ Nel caso in cui \bar{x} non sia ottima, si cerca di spostarsi in un altro vertice, seguendo una **direzione di crescita**, che sia anche **ammissibile**.
- ▶ Se è possibile spostarsi indefinitamente lungo questa direzione di crescita, allora il problema è illimitato, altrimenti si incontra un'altro vertice, e **ci si sposta**.

SIMPLESSOPRIMALE(A, b, c, B)

1. $N \leftarrow \{1, \dots, m\} - B$;
2. $\bar{x} \leftarrow A_B^{-1}b_B$;
3. $\bar{y}_B \leftarrow cA_B^{-1}$;
4. $\bar{y}_N \leftarrow 0$;
5. Se $\bar{y}_B \geq 0$, allora termina con successo e restituisci \bar{x} e \bar{y} ;
6. $h \leftarrow \min\{i \in B \mid \bar{y}_i < 0\}$;
7. Sia ξ la colonna di indice h in $-(A_B^{-1})$;
8. Se $A_N\xi \leq 0$, allora termina e restituisci ξ : il problema è illimitato;
9. $k \leftarrow \arg \min\{\frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i\xi} \mid A_i\xi > 0 \wedge i \in N\}$;
10. $B \leftarrow B \cup \{k\} - \{h\}$;
11. Torna al punto 1.

Correttezza del Simpleso — I

- ▶ L'algoritmo lavora mantenendo i seguenti tre *invarianti*:
 - ▶ B è una **base ammissibile**;
 - ▶ \bar{x} è **soluzione ammissibile** per il problema primale

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\};$$

mentre $\bar{y}A = c$.

- ▶ Questo significa, tra l'altro, che \bar{x} è sempre un vertice.
- ▶ Osserviamo che per \bar{y} la condizione $\bar{y}A = c$ vale per come \bar{y}_B e \bar{y}_N vengono inizializzati.
- ▶ Di conseguenza, \bar{y} è soluzione per il **duale**

$$\max\{yb \mid yA = c, y \geq 0\}$$

sse $\bar{y}_B \geq 0$.

Correttezza del Simpleso — II

- ▶ Se, quindi $\bar{y}_B \geq 0$, allora l'algoritmo correttamente **termina**, restituendo \bar{x} e \bar{y} che sono soluzioni ottime per il primale e per il duale (riga 5.)
- ▶ Se, invece, c'è un elemento di \bar{y} strettamente negativo, allora non vale l'ottimalità. Cerchiamo quindi una direzione ammissibile e di crescita per \bar{x} .
 - ▶ ξ , per come definito in riga 7. è sempre **direzione di crescita**, perché

$$c\xi = c(-A_B^{-1}u_h) = -(cA_B^{-1})u_h = -\bar{y}u_h = -\bar{y}_h > 0$$

dove u_h è un vettore ovunque nullo, tranne nella componente corrispondente a i , in cui vale 1.

- ▶ ξ , però, potrebbe non essere **direzione ammissibile**, e soprattutto, non sappiamo quale sia il “primo” vertice lungo ξ .

Correttezza del Simpleso — III

- ▶ Il vettore $A_B\xi$ è una delle colonne della matrice identica, cambiata di segno, e quindi $A_B\xi \leq 0$.
- ▶ Se $i \in N$ e $A_i\xi \leq 0$, allora $\bar{x}(\lambda)$ soddisfa l' i -esimo vincolo per ogni valore non-negativo di λ .
- ▶ Se $i \in N$ e $A_i\xi > 0$, allora

$$A_i\bar{x}(\lambda) = A_i\bar{x} + \lambda A_i\xi \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \leq (b_i - A_i\bar{x})/A_i\xi$$

- ▶ Scegliamo l'indice i che rende tale λ minimo. Chiamiamolo k .
- ▶ Sia $\bar{\lambda}$ il valore $\min\{\lambda_i \mid i \in N\}$.

Correttezza del Simplexso — IV

1. Se $\bar{\lambda} = +\infty$, ossia se $A_N \xi < 0$, allora il problema è **illimitato**.
 - ▶ Questo caso è gestito dalla riga 8. dell'Algoritmo.
2. Se $0 < \bar{\lambda} < +\infty$, allora $x(\lambda)$ è ammissibile per ogni $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ e non ammissibile altrimenti. Possiamo quindi spostarci da B a $B \cup \{k\} - \{h\}$, che corrisponde ad un **altro vertice**.
 - ▶ Questo caso è gestito dalle righe 9.-10. dell'Algoritmo.
3. Se $\bar{\lambda} = 0$, allora la direzione **non è ammissibile**, ma possiamo comunque effettuare un cambio di base verso $B \cup \{k\} - \{h\}$, che ci fa restare sullo stesso vertice.
 - ▶ Questo caso è gestito dalle righe 9.-10. dell'Algoritmo.

Complessità del Simplexso

- ▶ Si può dimostrare che ogni base ammissibile viene trattata **al più** una volta durante l'esecuzione dell'Algoritmo.
- ▶ Di conseguenza, vi saranno al più $\binom{m}{n}$ iterazioni, ovvero un numero che può divenire **esponenziale** in n .
- ▶ Detto questo:
 - ▶ Da un punto di vista *teorico*, la complessità dell'Algoritmo nel caso **medio** è polinomiale.
 - ▶ Da un punto di vista *pratico*, si osserva come il Simplexso sia l'algoritmo più efficiente, e che si comporti **meglio** di altri algoritmi (alcuni dei quali si possono dimostrare essere polinomiali in tempo).