Sei lezioni sulla *Conseguenza Logica*
Dag Prawitz, Lezione 5

(Traduzione di Valentina Benedetti)

marzo 2007

Handout

Bologna, Lecture 5, March 2007 (meant as an aid to the lecture not intended to be self-contained)

(CONTINUATION: INTRODUCTION TO A CONSTRUCTIVIST SEMANTICS. C. A proposal)

2. ***Inferences.*** An inference of the simplest kind, when seen as an individual act, is individuated by a number of premisses $A_1, A_2, \ldots, A_n$ their grounds $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, an operation ϕ applicable to these grounds, a conclusion B, an agent who carries out the operation, and a time at which the act is performed. The act consists in applying the operation ϕ to the given grounds, claiming that, since $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ are grounds for $A_1, A_2, \ldots, a_n$, the result obtained by this application of the operation ϕ is a ground for B.

a) If we abstract from the agent and the time, we get an *inference type*, which my be written

$$\frac{\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\\ A_1 & A_2 & \ldots & A_n\end{matrix}}{B}\,\phi$$

The operation ϕ is to have n argument places that can be filled with $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

b) If we also abstract from the particular premisses, their grounds, and the conclusion, leaving only the function ϕ and a relation that is to hold between premisses and conclusion, we get an *inference form.* For instance, modus ponens

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\,\phi$$

is such an inference form, where ϕ may be written $\lambda\xi_1\xi_2\phi(\xi_1, \xi_2; A, A \to B/B)$ to indicate that it is an operation with two argument places to be filled with grounds for sentences of the form A and $A \to B$ and that the result of applying the operation to such grounds α and β, i.e.

$$\phi(\alpha, \beta; A, A \to B/B),$$

is a ground for B. (What operation ϕ is, remains to be said.)

In general, the operation ϕ may be written

$$\lambda\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\phi(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n; A_1, A_2, \ldots, A_n/B)$$

to indicate that it has n argument places that can be filled with arguments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ for the sentences $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectively, and that when the operation is so applied, its value, i.e.

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; A_1, A_2, \ldots, A_n/B),$$

is a ground for the conclusion B.

3. ***Grounds.*** The notion of ground is taken as a basic notion tied to other basic notions in the philosophy of language: one expects that assertions are made on good grounds (not necessarily conclusive, but good enough with respect to the situation in which the assertion is made) or, rather, assertions are evaluated as correct depending on whether they are made on sufficiently good grounds. Here we restrict ourselves to *conclusive* (maximally good) grounds (required e.g. in mathematics and mushroom picking).

Note that the term 'ground' for a sentence A is sometimes used to indicate just the sentences from which A has been inferred. It is here used to denote what justifies the assertion of A or the belief in A. A ground is here seen as something abstract, but we may also look at the notation used to speak of the grounds; such notations will here be called proofs or arguments.

4. ***Semantical and metaphysical principle.*** Since the meaning of a sentence is supposed to be given in terms of what counts as a ground for it, the sentence is taken *to say* (or the *content* of the sentence is) that there is such a ground (not necessarily one that has actually been found, but a ground that could in principle be found); in other words, the sentence is true if and only if there is (potentially) such a ground for it. If the world is equated with the totality of what is the case ("Il mondo tutto ciò che è il caso", Wittgenstein in Tractatus.), and if 'all that is the case', i.e. all the truths, are equated with all that there is potentially grounds for, then one could say that the world is not understood as given independently of us but is construed in terms of what it is for us to have grounds ('semantics from a constructivist point of view'; as to whether this commits us to a constructive or intuitionistic logic, see below).

5. ***Examples of conclusive grounds.*** Example outside of mathematics: in the case of an observation sentence such as 'it rains' or 'here is a champignon', the relevant observation that settles whether it rains or whether here is a champignon. Example from logic: the result of carrying out an inference of the form conjunction introduction when the premisses are given with conclusive grounds. An instance of conjunction introduction is according to the above understood as an inference type of the form

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\alpha & \beta \\ A & B\end{array}}{A \wedge B}\wedge I$$

The operation $\wedge I$ is not defined in terms of other notions but may be described as the mental act of bringing together the ground α for A and the ground β for B, getting a composite ground $\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ for $A \wedge B$. That there is such an operation that yields a ground for the conjunction when applied to grounds for the conjuncts is taken to be a part of the meaning of conjunction; to name it we call it $\wedge I$. The idea is thus that in virtue of the meaning of $\wedge$, something is a ground for $A \wedge B$ if and only if it is of the form $\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ where α is a ground for A and β is a ground for B. The sentence operator $\wedge$ and the inference operator $\wedge I$ are thus explained together (more or less as the notion of natural number and the successor operation are explained by the help of each other).

It should also be said that the composite ground $\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ is to be understood in such a way that $\wedge I(\alpha_1, \beta_1; A_1, B_1/A_1 \wedge B_1) = \wedge I(\alpha_2, \beta_2; A_2, B_2/A_2 \wedge B_2)$ only if $A_1 = A_2, \alpha_1 = \alpha_2, B_1 = B_2$, and $\beta_1 = \beta_2$.

6. ***Historical remark.*** The idea that the introduction rules of Gentzen's system of natural deduction determine the meaning of the logical constants ('gives, so to say, a definition of them') was put forward by Gentzen. It is here turned into the idea that the meaning of a sentence is explained in terms of its possible grounds, and this idea is developed by specifying what counts as a ground for a sentence by recursion in terms of what counts as a ground for its subsentences (in a way similar to how truth is specified when truth conditions are taken as meaning constitutive). As we saw in the example of conjunction, γ is a ground for $A \wedge B$ if and only if γ is of the form $\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$, where α is a ground for A, and β is a ground for B.

In contrast to the idea that meaning is given by any inference rules (that satisfy some condition such as being harmonious), the meaning explanations now proposed respects the *principle of compositionality*, i.e. the principle that the meaning of a composite expression is determined by the meaning of its immediate parts and how they are put together. In the main lines, the presentation here follows the paper D. Prawitz, 'Logical Consequence from a Constructivist Point of View' in *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* However, in the present development, I stress the epistemic aspect a little stronger and see the application of an inference as the carrying out of an operation on grounds. The validity of an inference then become equated with the operation giving the intended result instead of the existence of a proof from the premisses to the conclusion or an argument for the conclusion from the premisses, which is how validity is defined in the paper. The notions of proof and arguments can then be defined on the basis of the notion of ground.

Corrections of misprints in the paper: page 679, line 2 from the bottom: 'consequence' should be 'constants';

page 682, 2nd paragraph, 2nd line: 'or so mething toward a proof' should be 'or make something a proof'

page 682, 3rd paragraph, 3rd line: 'or that this how' should be 'or that this is how'

7. ***Validity of inferences.*** An inference or an inference type of the form exhibited in 2a above can now be defined to be *valid* if and only if $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ are grounds for $A_1, A_2, ..., A_n$, respectively, and $\phi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; A_1, A_2, ..., A_n/B)$, i.e. the result of applying the operation ϕ to the grounds for the premisses, is a ground for the conclusion.

An inference form is *valid* if and only if all of its instances where the given grounds are grounds for the premisses, are valid, i.e., assuming that the instances are of the form exhibited in 2a, if and only if, for every $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, if $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ are grounds for $A_1, A_2, ..., A_n$, then $\phi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; A_1, A_2, ..., A_n/B)$ is a ground for B.

8. ***Claim.*** It can now be claimed that the validity of an inference as defined above solves what was called A basic problem (section A in hand-out for lecture 4) when R is taken to be the relation 'P makes the inference J': It is to be recalled that to make an inference as now understood is to apply the operation in question to the grounds given for the premisses. Hence, if the inference J is valid, if (a) P makes the inference J, and if (c) P has grounds for the premisses of the inference, then by the definition of validity, P gets as a result a ground for the conclusion, i.e. (c) P has a ground for the conclusion. Furthermore, it seems reasonable to say that we gain knowledge, come into position (c), by having grounds for some premisses (condition (b)) and then making an inference from them to a conclusion (condition (a)).

LOGICAL CONSEQUENCE REVISITED

We have defined the validity of an inference (inference type or inference form) in terms of grounds and operations on them without referring to the notion of logical consequence. Whether a specific inference is valid depends on the meaning of the premisses and conclusion, i.e. what counts as a ground for them, and on the operation in question. If we understand by a (one-step) *argument form* what we get when we leave out the operation from an inference form, then we may say that an *argument form is valid* if and only if there is an operation ϕ such that the inference form that results by taking the argument form together with ϕ is valid. The validity of an argument form defined in that way depends only on the meaning of the involved sentences, and may therefore be called analytical validity.

If we want to speak of inferences that are valid in virtue of just the logical vocabulary occurring in the sentences involved, we may define an inference form to be *logically valid* if and only if all inference forms of the same logical form are valid. Similarly, we may speak of an *argument* form

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

$$\frac{A_1^V, A_2^V, \ldots, A_n^V}{B^V}$$

is valid $A_1^V, A_2^V, \ldots, A_n^V$ and B^V being the result of varying the non-logical expressions in $A_1, A_2, \ldots, A_n$, and B. Instead, we may instead like Tarski consider assignments of meanings to the non-logical expressions and speak of something being a ground for a sentence under such an assignment. In these ways we may define notions of logical validity of inferences with the help of the concept of an inference being valid. Having arrived at a concept of an argument form being logically valid we may consider reversing the conceptual order between logical consequence and an inference being valid by saying that a sentence B is a logical consequence of sentences $A_1, A_2, \ldots, A_n$ if and only if the inference from $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to B is logically valid.

SEMANTICS FOR FIRST ORDER LOGIC

1. ***Reasoning under assumptions and unsaturated grounds.*** Inferences do not always proceed from established assertions or beliefs. We also make assumptions and reason under assumptions, some of which may be discharged during the process of reasoning. The sentences used in such reasoning are not categorically asserted, and there is no ground for them in the sense of ground used so far. But they are held true under the assumptions made, and we need to find some appropriate notion of ground for them. To get that we introduce the notion of an unsaturated ground.

The grounds that have been spoken of so far may be called saturated grounds. An unsaturated ground for a sentence A is something that has gaps for saturated grounds for specific sentences, and is such that when the gaps are filled with saturated grounds for these sentences it becomes a saturated ground for A. When Γ is a set of sentences $A_1, A_2, \ldots, A_n, \alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ is an unsaturated ground for a sentence A under the set Γ of assumptions if α has n gaps for saturated grounds for $A_1, A_2, \ldots, A_n$ and becomes a saturated ground for A when these gaps are filled with saturated grounds for the sentences $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

For any sentence A there is a unsaturated ground for it, namely the one consisting of just one gap that is to be filled with a saturated ground for A; when it is so filled it obviously becomes a saturated ground for A. Hence, when we make an assumption A, an unsaturated ground for A is always available.

When one or several of the premisses of an inference are assumptions, the operation associated with the inference is to be understood as operating on grounds that are unsaturated.

2. ***Reasoning with open sentences and their grounds.*** We may also use open sentences in inferences saying e.g. 'Let n be a number. Then n is either odd or even'. An unsaturated ground for the open sentence $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ with n free variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is to have n gaps for individual terms such that it becomes a saturated ground for $A(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ when the gaps are filled with individual terms $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

3. ***Grounds for sentences in first order languages*** .

δ is a (saturated) ground for

$A \wedge B$ if and only if δ is of the form $\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ where α is a ground for A and β is a ground for B;

$A \vee B$ if and only if δ is either of the form $\vee I_1(\alpha; A/A \vee B)$ where α is a ground for A or of the form $\vee I_2(\beta; B/A \vee B)$ where β is a ground for B;

$A \rightarrow B$ if and only if δ is of the form $\rightarrow I\xi A(\beta(\xi A); B/A \rightarrow B)$ where $\beta(\xi)$ is an unsaturated ground for B under the assumption A here ξA indicates a gap in β for grounds for A that get closed by the operation, which is indicated by '$\rightarrow I\xi A$';

$\forall x A(x)$ if and only if δ is of the form $\forall I x(\alpha(x); A(x)/\forall x A(x))$ where α is an unsaturated ground for the open sentence $A(x)$ here a gap for individual terms in $\alpha(x)$get closed;

$\exists x A(x)$ if and only if δ is of the form $\exists I(\alpha; A(t)/\exists x A(x))$, where α is a ground for $A(t)$.

There is no ground for $\perp$.

Note that the inferences $\rightarrow I$ and $\forall I$ are of a more complicated kind than the ones dealt with in the introduction (see section 2). They are individuated by one more feature, namely by closing a gap in the unsaturated ground given for the premiss.

To these clauses saying what is a ground for sentences of various forms we have to add clauses that specify what counts as a ground for the atomic sentences (except $\perp$) that occur in the language. Depending on what these atomic sentences are, we may need to introduce certain grounds that we take to exist because of how we understand these sentences. We may say for instance that an atomic sentence $t = u$ is understood as a sentence that we directly verify by finding the terms t and u to be the same upon inspecting them. According to the train of though followed here, this means that we should say that there is an immediate ground for the sentence $t = t$. Introducing a name for this ground, say ι_t, we should then add to the clauses above that ι_t is a ground for the sentence $t = t$, or using the same kind of notation as for operations for inference, we could say that $= I(\ ; /t = t)$ is a ground for $t = t$, where $= I$ is an operation without argument places. It is to be noted that we have specified above what counts as a ground for sentence A in terms of what counts as a ground or an unsaturated ground for the immediate constituents of A, and that the semantics therefore still satisfies the principal of compositionality. Note also that in some cases we refer to unsaturated grounds for the immediate constituents, but that the explanation of what is an unsaturated ground in turn refers to what are saturated grounds for certain sentences, which again are immediate constituents of the original sentence.

Furthermore, it is worth noticing that although the notion of ground for first order sentences is determined by a recursion, the notion does not thereby becomes recursive, and is therefore very different from the notion of a proof in a formal system. This depends essentially on the fact that the notion of an unsaturated ground for a sentence B under an assumption A, is essentially like a function from the grounds for A to the grounds for B. There is no restriction as to how this function is built up. For instance, it may very well be the case that, even when A and B are first order sentences, to built up this function we need higher order notions, perhaps some ones that have not been heard of today.

4. ***The validity of the inference rules of natural deduction for first order sentences*** By associating appropriate operations to the inferences rules of Gentzen's system for natural deduction we get inference forms that are valid in the sense defined above.

   a) The introduction rules. To each introduction rule we can obviously associate the operation that defines what is counted as a ground for the conclusion of the inference. By applying that operation to grounds for the premisses of the inferences, we obtain as result something that is a ground for the conclusion in virtue of what the conclusion means indeed, by the meaning of the conclusion, what counts as a ground for the conclusion is the very result obtained by applying the operation in question.

   b) The elimination rules. To the elimination rules we have to *define* appropriate operations. If we name them in the same way as in the Gentzen's system, we have

   $\wedge E_1(\wedge I(\alpha,\beta;A,B/A\wedge B),A\wedge B/A)=\alpha$

   $\wedge E_2(\wedge I(\alpha,\beta;A,B/A\wedge B),A\wedge B/B)=\beta$

   $\vee E\xi^A\zeta^B(\vee I_1(\delta;A/A\vee B),\alpha(\xi),\beta(\zeta);A\vee B,C,C/C)=\alpha(\delta)$

   $\vee E\xi^A\zeta^B(\vee I_2(\delta;B/A\vee B),\alpha(\xi),\beta(\zeta);A\vee B,C,C/C)=\beta(\delta)$

   $\to E(\to I\xi(\beta(\xi);B/A\to B),\alpha;A\to B,A/B)=\beta(\alpha)$

   $\forall E(\forall Ix(\alpha(x);A(x)/\forall xA(x));\forall lxA(x)/A(t))=\alpha(t)$

   $\exists E\xi^{A(x)}x(\exists I(\alpha;A(t)/\exists xA(x)),\beta(\xi^{A(x)},x));\exists xA(x),C/C)=\beta(\alpha,t)$

   $\perp E_A(\beta;\perp/A)=\alpha$, where α is what counts as a ground for A

   Suppose that in each of these operations the objects that fill the argument places are grounds for the premisses. It can then be seen that the result of the operations when applied to these grounds is a ground for the conclusion, which means that the inference forms that we get when we associate an elimination rule with the corresponding operation as defined above is valid. All the argument forms of the intuitionistic system of natural deduction thus come out valid in the sense defined here.

5. ***Classical versus constructive or intuitionistic reasoning*** Although intuitionistic logic is usually considered to represent a more restrictive way of reasoning, one may to some extent look upon the relation between classical and constructive reasoning the other way around. Let us consider the following intuitionistic interpretation I of the sentences in first order Peano arithmetic:

   $A^I=A$, for atomic sentences A

   $(A\wedge B)^I=A^I\wedge B^I$

   $(A\vee B)^I=\neg(\neg A^I\wedge\neg B^I)$

$(A \to B)^I = A^I \to B^I$
$(\forall x A)^I = \forall x A^I$
$(\exists x A)^I = \neg \forall x \neg A^I$

Then a sentence A is provable in classical first order Peano arithmetic if and only if A^I is provable in intuitionistic first order Peano arithmetic. What is said in classical first order Peano arithmetic can thus be understood intuitionistically in a subsystem of intuitionistic arithmetic if interpreted suitably. One can say from this perspective that the intuitionistic language contains some additional logical constants as compared to the classical language, viz. $\vee$ and $\exists$. If we leave out these constants, we have a language that is adequate enough for classical reasoning, and all the argument forms in natural deduction for first order Peano arithmetic in this language now come out as valid according to a constructivist semantics, as shown in section 4 above.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Ciò che avrò da dirvi va visto in relazione a quello che ho chiamato nelle lezioni precedenti *il problema fondamentale*, ovvero data una inferenza valida, J, come possiamo render conto del fatto che otteniamo conoscenza usando questa inferenza, ovvero com'è che una persona può avere *ground* per B, una volta che abbia *ground* per A e stia nella relazione R con J.

$$\frac{A}{B}\,J \quad e'\,valida$$

Se $R(P, J)$
e P ha *ground* per A
dunque P ha *ground* per B

Non c'è una soluzione ovvia perché se prendiamo R vuota, allora

Se $R(P, J)$
e P ha *ground* per A
dunque P ha *ground* per B

non vale, e se prendiamo R come *P sa che J è valida*, allora non possiamo dire che P ottiene conoscenza per B in questo modo, perché già ci sono problemi con *P sa che J è valida*.

Etchemendy dice che l'approccio teoretico-dedutivo è impotente da un punto di vista epistemico.

L'idea che intendo sviluppare qui è simile a quella che ho esposto nell'articolo *Logical consequence from a constructive point of view*, ma ho cambiato varie cose, quindi è davvero un'idea nuova. Ora voglio enfatizzare più l'aspetto epistemico di quello modale della necessità ed ho introdotto il concetto astratto di *grounds*, mentre nell'articolo parlo di dimostrazioni o argomenti. Invece di dire che J è un'inferenza valida perché c'è una dimostrazione dalle premesse alla conclusione, uso il concetto più astratto di *ground* ed in seguito parlerò delle dimostrazioni come notazioni per *ground*.

Un'inferenza è un *atto* che agisce sui *ground* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ di $A_1, A_2, \ldots, A_n$, rispettivamente, e genera un *ground* per B.

$$\frac{\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ A_1 & A_2 & \ldots & A_n\end{matrix}}{B}\,\phi$$

Eseguire un'inferenza è applicare l'operazione ϕ ai *ground* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ per $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e sostenere (*to claim*) che $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; A_1, A_2, \ldots, A_n/B)$ è un *ground* per B.

Sia data una forma argomentativa (*argument form*) - ove non ci sia confusione useremo anche l'espressione *argomento*[1]

$$\frac{F \quad F \to H}{H}$$

Problema: quand'è che tale forma argomentativa è valida?

Quando esiste una operazione ϕ tale che la *forma inferenziale*

$$\frac{F \quad F \to H}{H}\,\phi$$

è *valida.*

Ciò equivale a dire che ogni *inference type* - ove A, B sono formule specifiche -

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ A & A \to B \end{array}$$
$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\,\phi$$

è *valido.* Ovvero che dati i *ground* α, β per A e $A \to B$ rispettivamente, $\phi(\alpha, \beta; A, A \to B/B)$ è un *ground* per B. (Vedi il paragrafo 7. dell'handout)

Cosa sia questa operazione ϕ rimane da dire.

0.0.1 Il problema fondamentale

Prima di andare avanti vorrei dare un'idea generale del progetto nella sua globalità e vorrei mostrare come intendo risolvere il problema che avevamo posto.
Sia data l' inferenza J

$$\frac{A}{B}\,J$$

Vogliamo dire che questa inferenza è valida sse

$$\alpha$$
$$\frac{A}{B}\,\phi$$

ovvero se a) $R(P, J)$
e b) P ha *ground* per A
allora c) P ha *ground* per B

Se pensiamo alla relazione $R(P, J)$ fra una persona ed una inferenza come a quella relazione che sussiste quando la persona esegue l'operazione ϕ, allora il condizionale dato sopra vale.
Come abbiamo visto non possiamo chiedere ad R né troppo né troppo poco, la cosa giusta è proprio dire che P esegue l'inferenza nel nostro senso, ovvero esegue l'operazione ϕ.

Questo approccio inoltre rende conto della *validità analitica*: dire che un'inferenza è valida in virtù del significato delle proposizioni coinvolte è dire che è valida in virtù di ciò che conta come *ground*

[1] Una forma argomentativa è data in schematicamente: F, H sono metavariabli per formule. Le regole del calcolo della deduzione naturale sono casi particolari di forme argomentative

per queste proposizioni.

Se poi si sostiene che la *validità logica* non deve essere già la validità analitica ma la validità in virtù del significato delle costanti logiche allora da questa nozione di validità di una inferenza uno può facilmente ottenere la nozione di validità logica usando l'idea di Bolzano di variare il significato delle espressioni non-logiche. Così ora possiamo dire che un'inferenza

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}\ \phi$$

è *logicamente valida* sse comunque variamo il significato delle costanti non-logiche, il risultato di questa variazione V:

$$\frac{A_1^V, A_2^V, \ldots, A_n^V}{B^V}\ \phi$$

è una inferenza valida.
Se vogliamo invece percorrere la strada di Tarski, possiamo usare le interpretazioni invece delle variazioni, ma questo non è difficile da fare.

0.0.2 Cosa è un *ground*?

ground è preso qui come una nozione di base, non lo definisco. Se uno lo volesse definire attraverso una qualche definizione per recursione, farebbe lo stesso errore che si fa quando si definisce la verità e poi il significato in termini di condizioni di verità.

ground è una nozione di base non riducibile a qualcos'altro, così come la verità non è riducibile a qualche altra cosa quando le condizioni di verità sono intese dare il significato. *ground* deve essere connesso con altre nozioni filosofiche ed in particolare in filosofia del linguaggio con la nozione di *fare un'asserzione*. Un'asserzione è qualcosa che viene fatta sulla base di un *ground*, non dico conclusivo, ma un buon *ground* e cosa sia un *ground* sufficientemente buono dipende dalla situazione in cui l'asserzione viene fatta. Un'asserzione per essere corretta deve essere fatta sulla base di *ground* sufficientemente buoni.

In questo contesto parlo solo di *ground conclusivi*. Certamente in matematica uno si aspetta *ground* conclusivi, per esempio quando si formula un teorema, ma credo che anche in altre situazioni ci si aspetti *ground* conclusivi, per esempio in un tribunale, una condanna deve essere emessa al di là di ogni ragionevole dubbio, o quando si cercano i funghi. In Svezia ogni anno molte persone muoiono perché hanno confuso uno champignon con un ovolaccio. Questo non significa che siamo infallibili, si pensava che fosse uno champignon (si pensava che fosse una dimostrazione) ma in realtà ci siamo confusi, non avevamo una dimostrazione.

Per dire cosa sia un *ground* per una proposizione, occorre alla fine fare riferimento al significato della proposizione e questo non è certo originale, ma io qui voglio dire qualcosa di più forte e cioè che il significato è dato in termini di ciò che conta come *ground* per la proposizione. Se si assume questa posizione che il significato è dato in termini di *ground* allora è naturale dire che il contenuto di una proposizione - ciò che la proposizione esprime - è tale *ground*.

Da cui

A è vera se esiste un *ground* conclusivo per A

Esiste può essere interpretato in vari modi, esiste nel senso che c'è di fatto, è stato costruito; io non lo prenderò in questo senso, ma solo che c'è un *ground* per A anche se nessuno lo conosce o lo conoscerà mai. L'idea è che la verità è connessa con l'esistenza o l'esistenza potenziale di tale *ground*. Questo ha anche delle implicazioni metafisiche perché se si considera che "il mondo è tutto ciò che è il caso" (Wittgenstein) ovvero la totalità delle verità, allora il mondo è interpretato in termini di cos'è avere un *ground*. Questa potremmo chiamarla una posizione costruttivista della verità. Io l'ho chiamata *semantica costruttiva* o *semantica da un punto di vista costruttivo* e ciò non nel senso del ragionamento costruttivo o intuizionista; la mia posizione non ci obbliga affatto ad accettare l'impostazione intuizionista.

Questa mia posizione è molto diversa dalla posizione realista in cui la verità è data in virtù di come è il mondo, mondo completamente indipendente da noi. E questo è spesso espresso in modo negativo dicendo che la vertà non è in alcun modo connessa con cosa significhi per noi avere *ground* per qualcosa. Ci possono essere verità che neppure in linea di principio possono avere *ground*; nessuna connessione fra (possibili) *ground* e verità.

Esempi di *ground*

Consideriamo enunciati osservativi. Se uno vede che piove, questo è un *ground* conclusivo per l'enunciato 'piove'. Se uno vede che un fungo è uno champignon, questo è un *ground* conclusivo per l'enunciato 'questo è uno champignon'. In questi casi, osservazioni sono *ground*.

Ed ora vediamo un esempio di *ground* conclusivo in logica.

Consideriamo la regola di introduzione della congiunzione. Essa ha la forma:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

ed ora dico che se si hanno *ground* conclusivi per le premesse, allora esiste un'operazione ϕ che dà un *ground* conclusivo per la congiunzione.

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \vdots & \vdots \\ A & B \end{array}}{A \wedge B}\,\phi$$

Se uno chiede: ma come fai a sapere ciò? La risposta è: questo è ciò che la congiunzione significa, non puoi arrivare a niente di più basilare di questo. Noi comprendiamo la congiunzione in questo modo: che esiste una operazione che è tale che se applicata ai *ground* α e β, otteniamo un *ground* per la congiunzione. In altre parole, nel significato di congiunzione c'è un'operazione di questo tipo che possiamo chiamare $\wedge I$, con la seguente proprietà:

$\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ è un *ground* per $(A \wedge B)$, dato che α, β siano *ground* rispettivamente per A e B.

Quindi un *ground* per una congiunzione ha questa forma. Si potrebbe dire che in questo modo si spiega ciò che la congiunzione significa in termini della funzione $\wedge I$ ed al tempo stesso si spiega la funzione $\wedge I$ facendo riferimento alla congiunzione. In realtà queste due nozioni si spiegano a vicenda. E' analogo a chidersi 'cos'è un numero naturale'? E' ciò che si ottiene a partire dallo zero e applicando la funzione di successore. E cos'è la funzione di successore? E' la funzione che dà il prossimo numero naturale. Queste due nozioni vanno pensate insieme.

Riassumendo, δ è *ground* per $(A \wedge B)$ sse $\delta = \wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ è un *ground* per $(A \wedge B)$, ove α, β sono *ground* rispettivamente per A e B.

Strutturalmente questa definizione è molto simile alle condizioni di verità, ma ora le condizioni di verità sono sostituite da *ground*. Notiamo inoltre che il significato di una congiunzione - pensato in termini di *ground* - è dato ricorsivamente in termini dei significati - dei *ground* - delle componenti. E quindi rispettiamo il principio di *composizionalità*:

il significato di una proposizione composta dipende dai significati delle parti componenti e da come queste parti sono messe insieme.

Al contrario, se uno prende un insieme qualsiasi di regole di inferenza e dice che queste determinano il significato, il principio di composizionalità non viene rispettato. Storicamente il primo a suggerire che il significato di una proposizione è dato in termini di come viene stabilita come vera, fu Gerhard Gentzen. Dopo aver costruito il suo sistema di deduzione naturale egli notò che le regole di introduzione definiscono, per così dire, il significato della proposizione in questione.

Il significato di $A \to B$ è dato dalla regola di introduzione $\to I$:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B} \to I$$

E questa regola giustifica il *modus ponens*:

$$\dfrac{A \quad A \to B}{B} \to E$$

Se $A \to B$ significa che esiste una derivazione di B da A, allora data una derivazione di A ed una derivazione di B da A, possiamo ottenere una derivazione di B:

$$\begin{matrix}\vdots \\ [A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}$$

Consideriamo ora le regole per la disgiunzione ed il quantificatore esistenziale. Il significato di questi operatori verrà dato in termini intuizionisti, ma ciò non è affatto una limitazione, perché non abbiamo bisogno di questi operatori in logica classica, possiamo fare a meno di loro. Disgiunzione ed esistenziale sono un'aggiunta intuizionista.

0.0.3 *Ground* non saturi

Quando abbiamo un'inferenza del tipo

$$\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B} \phi$$

in molti casi non abbiamo stabilito le premesse, ma già le assumiamo e ragioniamo da queste assunzioni e questo non è stato considerato finora. Già Aristotele distingue tra una inferenza deduttiva ed una inferenza dialettica. Frege considera solo inferenze di questo tipo semplice, in cui le premesse sono stabilite e per molto tempo la logica si è occupata solo di esse. E' stato Gentzen che ha ripreso l'idea che si possa considerare inferenze le cui premesse non sono state stabilite, ma semplicemente assunte. E' con Gentzen che abbiamo questa idea di inferenze che dipendono da assunzioni. Comunque se ammettiamo tali inferenze, allora andiamo incontro a problemi, perché se assumiamo una proposizione, allora non abbiamo *ground* per essa.[2] Dobbiamo dunque spiegare in cosa consista fare un'assunzione e ragionare sotto assunzioni. La mia proposta qui è che parliamo di *ground non saturo.*

Un *ground non saturo* α è un *ground* con delle lacune (*gap*) se succede che quando colmiamo queste lacune il risultato è un *ground* saturo

[2] Dummett nel libro critica Frege per non aver considerato inferenze da assunzioni, mentre Sundholm sostine che Frege aveva ragione perché dopo tutto non sappiamo cos' è fare un'assunzione, lo possiamo capire tecnicamente, e.g. in deduzione naturale, ma non lo possiamo spiegare semanticamente.

> $\gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ è un *ground non saturo* per A sotto le assunzioni $A_1, A_2, \dots, A_n$ se il risultato di colmare queste lacune con *ground* saturi, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, per $A_1, A_2, \dots, A_n$, genera un *ground* saturo $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ per A.

Quando usiamo formule con variabili libere, ancora abbiamo a che fare con *ground* non saturi,

$$\frac{N(n)}{E(n) \vee O(n)}\ \phi$$

Ad esempio se n è un numero naturale allora o è pari o è dispari. Qui stiamo ragionando con una formula aperta, $N(n)$, non un'asserzione categorica, è un'asserzione schematica, non possiamo avere alcun *ground* per essa. Di nuovo possiamo avere un *ground* non saturo e qui la lacune è da colmare con termini, nomi per i numeri naturali.

> $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un *ground non saturo* per $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se il risultato di colmare queste lacune con i termini $a_1, a_2, \dots, a_n$ (del dominio di variazione) genera un *ground* saturo $\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ per A.

La nozione di *ground* non saturo sarà fondamentale per definire cosa sia un *ground* per una proposizione implicativa o universale, come vedremo nella prossima lezione.