Sei lezioni sulla *Conseguenza Logica*
Dag Prawitz
Lezione 2

(Traduzione di Valentina *B*enedetti)

marzo 2007

Handout

Bologna, Lecture 2, March 2007 (meant as an aid to the lecture not intended to be self-contained)

III. Shapiro's position (continue)

1. Intuitive, pre-theoretic ideas concerning logical consequence.
2. Logic consequence in a blended sense:
   - for each possible world w: the truth of Γ in w guarantees the truth of A in w in virtue of the meaning of the logical terms;
   - for each possible world w and for each interpretation $\mathcal{I}$ of non-logical terms: if Γ is true in w under $\mathcal{I}$, then A is true in w under $\mathcal{I}$;
   - meaning given by truth conditions.
3. Some concepts
   - A deductive system D is correct: if $\Gamma \vdash_D A$, then $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$. (Can be checked)
   - A deductive system D is adequate: if $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$, then $\Gamma \vdash_D A$
   - A model-theoretic semantic $\models$ is correct: if $\Gamma \models A$, then $\Gamma \Rightarrow_{L-bland} A$.
   - A model-theoretic semantic $\models$ is adequate: if $\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$, then $\Gamma \models A$. (Can be checked)
   - Pre-theoretical soundness of $\Rightarrow_{Ded}$ with respect to $\Rightarrow_{L-blend}$: if $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$, then $\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$.
4. Some results for 1st order logic:
   - If $\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$, then $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$.
   - D is adequate.
   - The model-theoretic semantic $\models$ is correct.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

0.0.1 Termini logici, termini non-logici

Dopo la lezione di ieri la Prof.Picardi mi ha suggerito di prendere in considerazione il problema della distinzione tra termini logici e termini non-logici. Penso che sia una buona idea dire qualcosa in proposito. Se avete letto l'articolo di Tarski, avrete visto che questo è un tema di cui si occupa esplicitamente e, sebbene la sua concezione di conseguenza logica sia stata largamente accettata più o meno senza riserve dalla logica moderna dalla metà del secolo scorso, egli stesso dice di non credere che la sua proposta risolva tutti i problemi: "*I am not at all of the opinion that in the result of the above discussion the problem of a materially adequate definition of the concept of consequence has been completely solved. On the contrary, I still see several open questions, only one of which, perhaps the most important, I shall point out here.*" (p.418).

La questione aperta è proprio la distinzione tra termini logici e termini non-logici. Già Bolzano si era occupato di questo e aveva sostenuto che forse non c'è una netta distinzione: si può pensare in modo differente riguardo a ciò e così si ottengono nozioni differenti di conseguenza logica a seconda di quali termini vengano presi come logici.

Questa distinzione tra termini logici e termini non-logici è un punto sensibile per la nozione di conseguenza logica di Bolzano e Tarski: se siamo molto 'generosi' riguardo a quali sono i termini logici, per cui non ci sono termini non-logici, allora non rimane niente da variare e la nozione di conseguenza logica collassa sul concetto di verità dell'implicazione materiale. Ma questo è quello che certamente non si vuole. Voglio dire, è un'idea condivisa che se si ha un'inferenza da A a B, non è una questione di valori di verità di A e B: A può essere falsa e B falsa, o A vera e B vera. La sola cosa che è esclusa è che A sia vera e B sia falsa. Ma non è sufficiente che se A è vera allora B è vera, per fare di questa un'inferenza logicamente valida. Prendete ad esempio l'inferenza 'Bologna è una città', dunque 'l'Italia è una repubblica'. Certamente non è un'inferenza valida, ma entrambe sono vere. Oppure, 'Bologna è una regione', dunque 'l'Italia è un regno' sono entrambe false, ma nessuno direbbe che è un'inferenza valida. Nessuno vuole il collasso sull'implicazione materiale. Quello che si vuole è che

A, dunque B sia valida sse *ogniqualvolta* A è vera, anche B è vera.

E' l'espressione*ogniqualvolta* il punto centrale, su cosa varia *ogniqualvolta*.

Se consideriamo ora un semplice esempio di conseguenza logica nel senso modellistico-teoretico, e.g. il *modus ponens*, dire che $P, P \to Q \models Q$ è la stessa cosa che dire $[P \land (P \to Q) \to Q]$ è logicamente vero, cioè

$$P, P \to Q \models Q \qquad \text{sse} \qquad \models P \land (P \to Q) \to Q.$$

Ciò significa per ogni dominio di individui e per ogni interpretazione dei termini (qui P e Q), $P \land (P \to Q) \to Q$ è vera in quella interpretazione. Se si pensa alla possibilità di quantificare tutti i possibili valori di P e Q, che è quello che fa nella logica del secondo ordine, si ottiene l'espressione corrispondente $\forall X \forall Y [X \land (X \to Y) \to Y]$. L'idea generale è che

$$P, P \to Q \models Q \quad \text{sse} \quad \models [P \land (P \to Q) \to Q] \quad \text{sse} \quad \models \forall X \forall Y [X \land (X \to Y) \to Y]$$

Il concetto di verità per un linguaggio del secondo ordine non è stato dato, ma $\models \forall X \forall Y [X \land (X \to Y) \to Y]$ significa che per ogni modello $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \forall X \forall Y [X \land (X \to Y) \to Y]$.

'Per ogni modello' significa variare l'interpretazione dei termini non-logici e variare il dominio di individui. Ma non ha importanza quale sia il dominio di individui in quanto qui non ci sono individui, non ci sono termini non-logici, quindi l'interpretazione non importa. Potremmo prendere quindi anche il modello vuoto[1] o il modello inteso, non importa quale modello, per cui possiamo parlare semplicemente di verità, e non di verità in un modello, ne segue che

$$\models [P \land (P \to Q) \to Q] \quad \text{sse} \quad \forall X \forall Y [X \land (X \to Y) \to Y] \text{ è vero (non logicamente vero).}$$

[1]???

Ciò significa che abbiamo ridotto l'idea di verità logica alla semplice verità. In un certo senso questo suona strano, questo è un punto critico. Quindi se non ci sono termini non-logici, abbiamo una sorta di collasso.

Già Tarski era ben consapevole di ciò. E' uno strano risultato che ora la verità logica diventi solo verità. Etchemendy nella sua critica alla nozione di conseguenza logica di Bolzano e Tarski, dice che questa distinzione fra termini logici e non-logici è un mito, non è di alcuna importanza. E' stato spesso sostenuto che questo è il problema principale, se riusciamo a risolverlo in maniera soddisfacente, allora la definizione di Bolzano e Tarski è corretta. Il punto di Etchemendy, che io penso sia giusto, ma ci torneremo in seguito, è che questo non sia un vero problema, non sia rilevante e non ci deve preoccupare. Tarski era abbastanza insicuro se questo fosse un reale problema filosofico o se fosse solo una questione terminologica. Ovviamente si può discutere su quale possa essere una ragionevole definizione di termini logici. Certamente i connettivi proposizionali e i quantificatori possono essere annoverati tra i termini logici e poi ci sono i predicati, i nomi, e così via, che sono termini non-logici.

0.0.2 Shapiro

Vogliamo ora discutere la posizione di Shapiro in relazione ad alcune nozioni intuitive di conseguenza logica. Come avrete visto nel suo articolo, Shapiro opera una transizione dalla conseguenza logica nel senso semantico-formale, $\Rightarrow_{FS}$, alla conseguenza logica nel senso misto, $\Rightarrow_{L-blend}$, in cui la conseguenza logica è qualcosa che preserva la verità attraverso i mondi possibili.

Si tratta del passaggio dall'espressione

la verità di Γ garantisce la verità di A in virtù del significato dei termini logici	*a*	per ogni mondo w, per ogni interpretazione $\mathcal{I}$ dei termini non-logici se Γ è vero in w anche A è vero in w.

Non è completamente ovvio come si possa compiere questa transizione; vediamo di compierla attraverso alcuni passi.

Prima di tutto concentriamoci sulla parola *significato* ed esaminiamo la nozione semantica di conseguenza logica in cui si dice che

$\Gamma \Rightarrow_S A$ sse la verità di Γ garantisce la verità di A in virtù del *significato* dei termini occorrenti in Γ ed A.

Si operi la seguente sostituzione

$\Gamma \Rightarrow_S A$ sse la verità di Γ garantisce la verità di A in virtù delle *condizioni di verità*.

Questo è un punto centrale in Shapiro, non lo dice esplicitamente, ma lo si ricava se si legge attentamente ciò che ha scritto. Dunque, il significato è dato in termini di condizioni di verità, quindi dire che è vero 'in virtù del significato' è lo stesso che dire 'in virtù delle condizioni di verità'. Ma cos' è una condizione di verità?

Digressione: significato come condizione di verità.

L'idea che il significato possa venir dato in termini di condizioni di verità è un'idea abbastanza comune. Supponete di voler sapere se piove, per cui vi chiedete 'è vero che piove'? Si deve essere in grado di fare due cose: (1) bisogna conoscere cosa significa 'piove' e quando mi è stato spiegato, (2) posso andare fuori nel mondo e vedere se è come dice la proposizione. Guardo fuori il tempo e vedo se piove. Quindi, primo si deve conoscere il significato e secondo si deve guardare il mondo, per decidere se è vero o no. Ora, il significato può essere visto come ciò che devo conoscere per sapere cosa cercare nel mondo o in altre parole, le condizioni che devono essere soddisfatte affinché la proposizione sia vera. Quindi il significato è naturalmente legato alle condizioni che il mondo deve soddisfare affinché la proposizione sia vera, come il mondo deve apparire affinché la proposizione sia vera, e questo è ciò che devo conoscere per prima cosa. Quindi il significato come condizione di verità è un'idea assai naturale.

Ora, cosa è una condizione di verità? Prendete come esempio la proposizione 'le due torri di Bologna sono grigie'. Qual è la condizione della sua verità? La condizione è che l'oggetto che il termine 'le due torri di Bologna' denota abbia le proprietà che il termine 'grigie' denota. Ciò significa certamente che questo oggetto, le due torri di Bologna, questo oggetto complesso (questi due oggetti) ha la proprietà di essere grigio. Se ora guardate la definizione di verità in un modello, le cose procedono di pari passo.

$$\mathcal{I} \models P(c) \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}(c) \text{ ha la proprietà } \mathcal{I}(P)$$

Se consideriamo l'interpretazione intesa $\mathcal{I}_0$, otteniamo

$$\mathcal{I}_0 \models P(c) \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}_0(c) \text{ ha la proprietà } \mathcal{I}_0(P)$$

Le condizioni di verità sono date semplicemente dall'interpretazione intesa, quindi possiamo scrivere

> $\Gamma \Rightarrow_S A$ sse la verità di Γ garantisce la verità di A in virtù della interpretazione intesa dei termini in Γ ed A.

> $\Gamma \Rightarrow_S A$ sse se le proposizioni di Γ sono vere nella interpretazione intesa, allora anche A è vera.

Ma quando si tratta della interpretazione intesa, si può sottacere l'interpretazione, quindi

> $\Gamma \Rightarrow_S A$ sse se le proposizioni di Γ sono vere, allora anche A è vera.

Per Shapiro quindi il termine 'garantisce' nella definizione di $\Rightarrow_S$ significa molto poco, significa semplicemente che se le proposizioni di Γ sono vere, allora A è vera. 'Garantisce' è una nozione molto debole in questa formulazione.

Fine della digressione.

Torniamo a $\Rightarrow_{FS}$:

$\Gamma \Rightarrow_{FS} A$ sse la verità di Γ garantisce la verità di A in virtù del *significato* dei termini logici.

Quindi il significato dei termini non-logici' deve essere irrilevante. Come possiamo fare ciò? Possiamo dire che se le proposizioni di Γ sono vere non solo nell'interpretazione intesa, ma in qualsiasi interpretazione che non cambi l'interpretazione dei termini logici, allora A è vera in quella stessa interpretazione.

(Si fa così in teoria dei modelli.)

$\Gamma \Rightarrow_{FS} A$ sse per ogni interpretazione $\mathcal{I}$ dei termini non-logici, se le proposizioni di Γ sono vere in $\mathcal{I}$, allora A è vera in $\mathcal{I}$.

Abbiamo così raggiunto una formulazione di $\Rightarrow_{FS}$ in cui non si fa uso dell'espressione 'garantisce'.

Shapiro non è veramente soddisfatto di questa nozione, perché essa porta ad alcune idee controintuitive. Se teniamo fisso il mondo, che è quello che Tarski fa nel suo articolo[2] allora accadono cose strane. Prendete la proposizione '$\exists x \exists y (x \neq y)$'. Se consideriamo l'identità come una nozione logica, questa proposizione è vera in un mondo sse in quel mondo c'è un oggetto che possiamo

[2]Sviluppi successivi in teoria dei modelli hanno cambiato questo

assegnare a x e un oggetto che possiamo assegnare a y che sono differenti. E certamente questo è vero nel nostro mondo, dal momento che nel nostro mondo ci sono più di due oggetti. Così $\exists x \exists y(x \neq y)$ risulta essere una verità logica e questo non è naturale. Quindi come liberarcene? Ce ne possiamo liberare variando anche il mondo, e quindi arrivando al senso 'misto' che è dato non solo in virtù del significato dei termini logici, cioè per ogni variazione dell'interpretazione, ma anche variando i mondi.

$\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$ sse per ogni mondo w, per ogni $\mathcal{I}$ dei termini non-logici, se le proposizioni di Γ sono vere in w sotto $\mathcal{I}$, allora anche A è vera in w sotto $\mathcal{I}$.

Abbiamo dunque concluso la transizione voluta da Shapiro da $\Rightarrow_{FS}$ a $\Rightarrow_{L-blend} A$. I passi fondamentali sono stati

- Significato = condizioni di verità;
- Condizioni di verità = interpretazione intesa;
- Solo per termini logici = variamo l'interpretazione dei termini non-logici.
- Unire W ad FS

0.0.3 Shapiro's square

Shapiro ha introdotto un certo numero di concetti che riportiamo nel diagramma qui sotto.

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma \Rightarrow_{Ded} A & \Gamma \Rightarrow_{L-blend} A \\
 & \\
\Gamma \vdash_D A & \Gamma \models A
\end{array}
$$

La prima nozione è che un sistema deduttivo D è *corretto* se vale che $\Gamma \vdash_D A$ implica $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$. Questo è ciò che Shapiro chiama 'correttezza di un sistema deduttivo D'.

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma \Rightarrow_{Ded} A & \Gamma \Rightarrow_{L-blend} A \\
\uparrow & \\
\Gamma \vdash_D A & \Gamma \models A
\end{array}
$$

Qui ora occorrerebbe distinguere tra gli enunciati del linguaggio naturale e quelli del linguaggio formale di D. Potremmo marcare Γ e A con un piccolo segno, per significare che prendiamo le proposizioni corrispondenti nel linguaggio naturale.

Ciò non è per niente semplice in realtà, anzi è veramente problematico, ma l'idea è che in una mano abbiamo formule, e nell'altra proposizioni del linguaggio naturale. Non entrerò nella questione qui, e non introdurrò alcuna notazione particolare, ma ricordate solo che abbiamo questa distinzione.

Quindi cosa vuol dire *corretto*? Ricorderete che $\vdash_D$ significa che abbiamo una derivazione formale di A da Γ, mentre $\Rightarrow_{Ded}$ significa che c'è una catena di ragionamenti, i cui passi sono ciascuno una legittima, *gap-free* e auto-evidente applicazione di regola di inferenza. Quindi si può ragionare da Γ ad A, usando solo queste *gap-free*, auto-evidenti regole di inferenza. Questo è quello che ciò significa.

Shapiro sottolinea che questa nozione di correttezza non è una nozione precisa. Così, mentre $\vdash_D$ e $\models$ sono nozioni precise, e possiamo anche dimostrare come siano relate, qui abbiamo qualcosa di più vago. Si può certamente sostenere che per ogni derivazione in un sistema deduttivo ci sia veramente una tale catena di applicazioni di regole auto-evidenti, ma talvolta si potrebbe avere che in D sono formulate delle regole molte strane, a cui non corrisponde niente nel linguaggio naturale. Questo è qualcosa su cui si possono avere opinioni, certo è un po' problematico, ma non privo di senso. In ogni caso per la Deduzione Naturale e il Calcolo dei Sequenti di Gentzen, questo vale.

La seconda nozione è che un sistema deduttivo D è *adeguato* se $[\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$ implica $\Gamma \vdash_D A]$.

$$\begin{array}{lll}
\Gamma \Rightarrow_{Ded} A & & \Gamma \Rightarrow_{L-blend} A \\
\uparrow \quad \searrow & & \\
\Gamma \vdash_D A & & \Gamma \models A
\end{array}$$

Certamente è molto più difficile considerarlo valido, non è così semplice avere una visione generale di tutti i possibili ragionamenti nel linguaggio naturale, possono essere di tanti tipi. Quindi non è affatto sicuro che valga e non è qualcosa che possiamo controllare facilmente, per questo abbiamo usato nel diagramma una freccia 'sbieca'. Abbiamo nozioni simili per i conceti semantici.

$\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$ è *corretta* se $[\Gamma \models A$ implica $\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A]$.

Per capire esattamente cosa significhi, Shapiro suggerisce di considerare il converso, ovvero se $[\Gamma \not\Rightarrow_{L-blend} A$ allora $\Gamma \not\models A]$. Così se $\Gamma \not\Rightarrow_{L-blend} A$ possiamo costruire un contromodello in cui Γ è vero e A è falsa. Non è ovvio come possiamo eseguire ciò perché forse la teoria dei modelli non ha le risorse per far fronte ai mondi possibili. Questa freccia è problematica. Nell'altra direzione,

$\models$ è *adeguata* sse $[\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$ implica $\Gamma \models A]$.

Il che significa che se $\Gamma \not\models A$ allora abbiamo un mondo possibile ed una interpretazione in cui Γ è vero e A falso. Shapiro sostiene che in fondo un modello è un possibile mondo e quindi questa freccia non è problematica.

$$\begin{array}{lll}
\Gamma \Rightarrow_{Ded} A & & \Gamma \Rightarrow_{L-blend} A \\
\uparrow \quad \searrow & & \downarrow \quad \nearrow \\
\Gamma \vdash_D A & & \Gamma \models A
\end{array}$$

Supponiamo ora che ci sia un ragionamento da Γ ad A che procede con *gap-free*, auto-evidenti applicazioni di regole di inferenze, allora certamente non può esserci un mondo ed una inetrpretazione in cui Γ è vero ed A falsa. Come potrebbe essere altrimenti? Quindi Shapiro assume che valga la freccia da $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$ a $\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$.

$$\begin{array}{lll}
\Gamma \Rightarrow_{Ded} A & \rightarrow & \Gamma \Rightarrow_{L-blend} A \\
\uparrow \quad \searrow & & \downarrow \quad \nearrow \\
\Gamma \vdash_D A & & \Gamma \models A
\end{array}$$

Tutte queste relazioni valgono in generale, per linguaggi di qualsiasi ordine, ma se ora ci limitiamo a linguaggi del primo ordine, allora per il teorema di correttezza e di completezza di Gödel abbiamo l'equivalenza fra $\Gamma \vdash_D A$ e $\Gamma \models A$

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \Rightarrow_{Ded} A & \rightarrow & \Gamma \Rightarrow_{L-blend} A \\
\uparrow \quad \searrow & & \downarrow \quad \nearrow \\
\Gamma \vdash_D A & \leftrightarrow & \Gamma \models A
\end{array}
$$

La domanda è ora se possiamo passare da $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$ a $\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$ o da $\Gamma \models A$ a $\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$. Seguendo la catena di implicazioni (orizzontali e verticali), otteniamo

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \Rightarrow_{Ded} A & \rightarrow & \Gamma \Rightarrow_{L-blend} A \\
\uparrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \uparrow \\
\Gamma \vdash_D A & \leftrightarrow & \Gamma \models A
\end{array}
$$

e tutti questi concetti divengono equivalenti.

Lasciatemi ora fare il sommario di quella che è la posizione di Shapiro. Penso che possiamo sintetizzarla in 4 punti.

1. Il primo punto è che ci sono diverse idee intuitive di conseguenza logica. In particolare ce ne sono due specialmente interessanti: la conseguenza logica in senso deduttivo e la conseguenza logica in senso misto. Ed esse sono concettualmente indipendenti: sono idee abbastanza diverse, concettualmente differenti, non segue veramente che una implica l'altra, ma si può sostenere che $\Rightarrow_{Ded}$ implichi $\Rightarrow_{L-blend}$.

2. Il secondo punto è che la logica moderna ha sviluppato per queste idee intuitive, da una parte la derivabilità in sistemi deduttivi e dall'altra la conseguenza in teoria dei modelli.

3. Il terzo punto è che sfruttando i risultati logici riguardo a queste nozioni logiche molto precise, specialmente usando la completezza, possiamo vedere come queste nozioni intuitive sono connesse. Usando la teoria della dimostrazione e la teoria dei modelli, si eliminano le nostre idee filosofiche sulla conseguenza logica. Questo il terzo punto: si possono usare i risultati delle nozioni precise per ottenere i risultati delle nozioni intuitive.

4. E ora il quarto punto, che egli stesso chiama eclettico, ma potrebbe essere chiamato anche ecumenico. Ci sono dispute tra i difensori della conseguenza in senso deduttivo e i difensori della conseguenza in senso teoretico-modellistico su quale sia la spiegazione migliore di conseguenza logica. Tarski per esempio appartiene a quest'ultimo gruppo. Il punto di Shapiro è che questa disputa è priva di significato: dice di non riuscir a vedere quale sia veramente il punto della discussione.

Non penso che abbia una forte argomentazione per dire che questa disputa è senza significato, ma ce ne offre un'argomentazione.