ISTITUZIONI DI LOGICA(1)

a.a. 2005-2006
(5 crediti)

prof.ssa Giovanna Corsi

TEST del 17 novembre 2005

Cognome Nome Corso di Laurea

---

1. (a) Cosa vuol dire che un connettivo è vero funzionale?
Un connettivo è vero funzionale quando il valore di verità degli enunciati ottenuti applicando tale connettivo dipende esclusivamente dal valore di verità degli enunciati a cui si applica.

   (b) Per ogni espressione elencata dire a quale categoria sintattica appartiene:

	enunciato (proposizione)	predicato (relazione)	termine chiuso	termine aperto
$2 + x$				X
$2 + x = 4$		X		
$\forall x \exists y(x < y)$	X			
$\exists y(x < y)$		X		
$2x + 3 = 5x$		X		
Il re di Francia è calvo	X			

   (c) L'asserzione seguente "In ogni formula ben formata il numero delle parentesi chiuse è uguale al numero delle parentesi aperte" fa parte del linguaggio oggetto o del metalinguaggio ?
metalinguaggio

2. Elenca le seguenti tautologie e regole

   (a) leggi di De Morgan $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

   (b) legge di Frege $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(c) terzo escluso $A \vee \neg A$

(d) Regola del Modus Tollendo Tollens

$$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}$$

(e) Regola del Modus Ponendo Ponens

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

(f) Regola della distinzione dei casi

$$\frac{B \to A \qquad C \to A}{(B \vee C) \to A}$$

(g) Se A è una tautologia e B una contraddizione, allora

	SI'	NO	perché
$A \to B$ è una contraddizione	X		*poiché A è vera e B è falsa per qualsiasi assegnazione di valore di verità degli atomi in esse occorrenti, allora qualsiasi sia il valore di verità degli atomi occorrenti in $A \to B$, $A \to B$ è falsa.*
$A \to B$ è soddisfacibile		X	*poiché abbiamo prima visto che $A \to B$ è una contraddizione, non esiste una assegnazione di valore di verità degli atomi occorrenti in $A \to B$, sì che $A \to B$ sia vera.*
$\neg A \to B$ è una tautologia	X		*$\neg A$ è una contraddizione*

3. Sfruttando le regole e le tautologie dell'esercizio 2, come puoi giustificare che

- A è conseguenza logica degli enunciati $B \to A$ e $\neg B \to A$.

$$\dfrac{B \vee \neg B \qquad \dfrac{B \to A \qquad \neg B \to A}{(B \vee \neg B) \to A}\,\textit{regola della distinzione dei casi}}{A}\,MP$$

- $\neg(A \to B)$ è conseguenza logica degli enunciati $A \to (B \to C)$ e $\neg(A \to C)$.

$$\dfrac{\dfrac{A \to (B \to C) \qquad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}{(A \to B) \to (A \to C)}\,MP \qquad \neg(A \to C)}{\neg(A \to B)}\,MTT$$

4. Utilizzando il metodo degli alberi semantici mostra che

- l'insieme $\{\neg(A \wedge C), A \vee B, \neg(B \vee C)\}$ è soddisfacibile

- $C \to A$ è conseguenza logica di $A \vee B$ e $C \to \neg B$

Facciamo vedere che l'insieme $\{\neg(A \wedge C), A \vee B, \neg(B \vee C)\}$ è soddisfacibile.

$V[\neg(A \wedge C)]^\dagger$
$V[A \vee B]^\dagger$
$V[\neg(B \vee C)]^\dagger$
$F[A \wedge C]^\dagger$
$F[B \vee C]^\dagger$
$F[B]$
$F[C]$

$V[A]$ $\qquad$ $V[B]$
$\qquad\qquad$ *chiuso*

$F[A]$ $\qquad$ $F[C]$
chiuso $\qquad$ aperto

Si consideri l'interpretazione tale che I(A) = 1, I(B) = 0, I(C) = 0. Allora $v^I(\neg(A \wedge C)) = 1$, $v^I(A \vee B) = 1$ e $v^I(\neg(B \vee C)) = 1$.

Facciamo vedere che $C \to A$ è conseguenza logica di $A \vee B$ e $C \to \neg B$.

$V[A \vee B]^\dagger$
$V[C \to \neg B]^\dagger$
$F[C \to A]^\dagger$
$V[C]$
$F[A]$

$V[A]$ $\qquad$ $V[B]$
chiuso

$F[C]$ $\qquad$ $V[A]$
chiuso $\qquad$ chiuso

5. Formalizza in un linguaggio enunciativo ove

   M := Mario va a votare (vota) B := Bruno va a votare A := Aldo va a votare

   (a) Mario non vota soltanto se Aldo e Bruno non votano
   $\neg M \to (\neg B \wedge \neg A)$

   (b) Benché Aldo e Bruno non abbiano votato, Mario ha votato
   $\neg(A \vee B) \wedge M$ oppure $\neg A \wedge \neg B \wedge M$

(c) Mario va a votare purché anche Bruno lo faccia
$M \to B$

(d) Almeno uno fra Mario, Aldo e Bruno va a votare
$M \lor A \lor B$

(e) Almeno due fra Mario, Aldo e Bruno vanno a votare
$(M \land A) \lor (M \land B) \lor (A \land B)$

(f) Mario va a votare solo nel caso in cui Bruno e Aldo vadano a votare
$M \leftrightarrow (B \land A)$

(g) Se l'enunciato A segue dalla propria negazione, allora è vero
$(\neg A \to A) \to A$

6. (a) Dai un esempio, nel linguaggio naturale, di sillogismo di II figura in BAROCO e dimostrane la correttezza.

P a M	tutti i marinai sono bugiardi
S o M	qualche fiorentino non è bugiardo
S o P	qualche fiorentino non è marinaio

P a M	P a M	P a M	P a M
non S o P	S a P	S a P	S a P
		S a M	non S o M
premessa maggiore e negazione della conclusione	equivalenza tra S a P e non S o P	applicazione di BARBARA	equivalenza tra S a M e non S o M

Otteniamo così una contraddizione con la premessa minore S o M.

(b) Quali sono le forme delle proposizioni categoriche?

S a P, Tutti gli S sono P

S i P, Qualche S è P

S e P, Nessun S è P

S o P, Qualche S non è P

7. Formalizza le seguenti asserzioni nel linguaggio di Tarski. $Cube(x) := x$ è un cubo - $Tet(x) := x$ è un tetraedro - $Small(x) := x$ è piccolo - $medium(x) := x$ è medio - $Large(x) := x$ è grande - $F(x) := x$ è una figura geometrica - $LeftOf(x, y) := x$ sta a sinistra di y - $Between(x, y, z) := x$ sta fra y e z.

   (a) Un cubo grande sta a sinistra di a

   $\exists x(Cube(x) \wedge Large(x) \wedge LeftOf(x, a))$

   (b) Un cubo è una figura geometrica

   $\forall x(Cube(x) \rightarrow F(x))$

   (c) Qualche cubo non è nè grande nè piccolo.

   $\exists x(Cube(x) \wedge \neg Large(x) \wedge \neg Small(x))$

   (d) Se non ci sono cubi, ogni cubo è grande

   $\neg \exists x Cube(x) \rightarrow \forall x(Cube(x) \rightarrow Large(x))$

   (e) a sta a sinistra di ogni cubo

   $\forall x(Cube(x) \rightarrow LeftOf(a, x))$

   (f) Tutti i tetraedri che hanno un cubo alla loro sinistra sono medi

   $\forall x(Tet(x) \wedge \exists y(Cube(y) \wedge LeftOf(x, y)) \rightarrow Medium(x))$

   (g) I cubi si dividono in grandi, medi e piccoli; inoltre solo i cubi piccoli stanno tra a e b.

   $\forall x(Cube(x) \rightarrow Large(x) \vee Medium(x) \vee Small(x)) \wedge \forall x(Between(x, a, b) \rightarrow Cube(x) \wedge Small(x))$

   (h) Tutti tranne a sono cubi
   $\forall x(x \neq a \rightarrow Cube(x))$

8. Stabilisci se le seguenti formule sono valide. (a è una costante individuale)[Usa il retro del foglio]

   (a) $(\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Qx)$
   (b) $\forall x(Px \rightarrow Qa) \rightarrow (\exists x Px \rightarrow Qa)$
   (c) $\exists x(Px \rightarrow \forall y Py)$

   Se un enunciato non è valido, costruisci il contromodello.

   [Usa il retro del foglio]

$F[(\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)]^\dagger$
$V[(\forall x Px \to \forall x Qx)]^\dagger$
$F[\forall x(Px \to Qx)]^\dagger$
$F[Pa \to Qa]^\dagger$
$V[Pa]$
$F[Qa]$

$F[\forall x Px]^\dagger$	$V[\forall x Qx]^\dagger$
$F[Pb]$	$V[Qa]$
aperto	chiuso

Contromodello per$(\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)$.
Poniamo $D = \{\underline{a}, \underline{b}\}$, $I(a) = \underline{a}, I(b) = \underline{b}, I(P) = \{a\}, I(Q) = \emptyset$.

$F[\forall x(Px \to Qa) \to (\exists x Px \to Qa)]^\dagger$
$V[\forall x(Px \to Qa)]$
$F[\exists x Px \to Qa]^\dagger$
$V[\exists x Px]^\dagger$
$F[Qa]$
$V[Pb]$
$V[Pb \to Qa]^\dagger$

$F[Pb]$	$V[Qa]$
chiuso	chiuso

L'enunciato $\forall x(Px \to Qa) \to (\exists x Px \to Qa)$ è valido.

$F[\exists x(Px \to \forall y Py)]$
$F[Pa \to \forall y Py]^\dagger$
$V[Pa]$
$F[\forall y Py]^\dagger$
$F[Pb]$
$F[Pb \to \forall y Py]^\dagger$
$V[Pb]$
$F[\forall y Py]$
chiuso

L'enunciato $\exists x(Px \to \forall y Py)$ è valido.