Teorema di deduzione

Novembre, 2004

Siano M, N insiemi di formule di $K^=$.

Definizione 0.1 (Deduzione) *Una derivazione in $K^=$ di B da $M \cup N$ è detta una N-*deduzione *se nessuna variabile occorrente libera in formule di N viene vincolata via GP o PA o viene sostituita via SV.*

Se M è un insieme di formule chiuse, ogni derivazione da M è una M-deduzione, e, banalmente, ogni *dimostrazione* è una deduzione.

Convenzione notazionale. Nel seguito scriveremo M, A invece di $M \cup \{A\}$.

0.1 Il teorema di deduzione

Teorema 0.2 (Teorema di deduzione) *Se $M, A \vdash B$ allora $M \vdash A \to B$, purchè la derivazione di B da M, A sia una A-deduzione.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D} = C_1, ..., C_r$ una A-deduzione di B da M, A (ovviamente $B = C_r$). Indichiamo con $\mathcal{D}_j$, $1 \leq j \leq r$, la A-(sotto)deduzione $C_1, ..., C_j$. Ovvero:

$\mathcal{D}_1$ è	C_1
$\mathcal{D}_2$ è	C_1, C_2
...	
$\mathcal{D}_j$ è	$C_1, C_2, ..., C_j$
...	
$\mathcal{D}_r$ è	$C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_r$

Mostriamo per induzione che per ogni j, $1 \leq j \leq r$, si ha:

($\star$) **esiste una derivazione $\mathcal{D}_j^\star$ di $A \to C_j$ da M e tale derivazio ne è un'*estensione* di $\mathcal{D}_{j-1}^\star$.**
Ne segue che $\mathcal{D}_r^\star$ è una derivazione di $A \to B$ da M.

$j = 1$. Si hanno tre casi:

- C_1 è assioma. Allora $\mathcal{D}_1^\star$ è:

1_1	$M \vdash C_1$	Assioma
1_2	$M \vdash C_1 \to (A \to C_1)$	A1.1
1_3	$M \vdash A \to C_1$	MP: $1_1, 1_2$

- C_1 è A. Allora $\mathcal{D}_1^\star$ è:

1_1	$M \vdash [A \to ((A \to A) \to A)] \to$ $[A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$	A1.2
1_2	$M \vdash A \to ((A \to A) \to A)$	A1.1
1_3	$M \vdash A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$	MP: $1_1, 1_2$
1_4	$M \vdash A \to ((A \to A)$	A.1
1_5	$M \vdash A \to A$	MP: $1_3, 1_4$

- $C_1 \in M$. Allora $\mathcal{D}_1^\star$ è:

1_1	$M \vdash C_1$	Assunzione
1_2	$M \vdash C_1 \to (A \to C_1)$	A1.1
1_3	$M \vdash A \to C_1$	MP: $1_1, 1_2$

$j = k + 1$. Per ipotesi d'induzione esiste una derivazione $\mathcal{D}_k^\star$ di $A \to C_k$ da M. Consideriamo la formula C_{k+1} della deduzione $\mathcal{D}$. Quattro casi sono possibili:

- C_{k+1} è un assioma oppure $C_{k+1} = A$ oppure $C_{k+1} \in M$. Allora la deduzione $\mathcal{D}_{k+1}^\star$ si ottiene semplicemente aggiungendo a $\mathcal{D}_k^\star$ una delle tre successioni di formule (a seconda dei vari casi) considerate per il caso $j = 1$ (ovviamente con C_1 sostituito da C_{k+1}). Esempio:

1	....	
...	....	
$1^\star$	$A \to C_1$	
...	....	
...	....	
...	....	
...	....	
$k^\star$	$A \to C_k$	
$k^\star$+1	C_{k+1}	Assioma
$k^\star$+2	$C_{k+1} \to (A \to C_{k+1})$	A1.1
$k^\star$+3	$A \to C_{k+1}$	MP:$k^\star$+1, $k^\star$+2

- C_{k+1} è ottenuta da formule precedenti, diciamo C_p e C_q, via applicazione della regola del *Modus Ponens*. Sia $p < q$. Allora $\mathcal{D}_{k+1}^\star$ ha la forma:

$$C_1, ..., C_{p-1}, (C_q \to C_{k+1}), ..., C_q, ..., C_k, C_{k+1}$$

oppure

$$C_1, ..., C_p, ..., C_{q-1}, (C_p \to C_{k+1}), ..., C_k, C_{k+1}$$

Sia, ad esempio, il secondo il caso in questione. Per ipotesi d'induzione esite una derivazione $\mathcal{D}_k^\star$ contenente le sottoderivazioni $\mathcal{D}_p^\star$ e $\mathcal{D}_q^\star$. Mostriamo che $\mathcal{D}_k^\star$ è estendibile ad una derivazione $\mathcal{D}_{k+1}^\star$ di $A \to C_{k+1}$ da M:

1	....	
...	....	
...	....	
$1^\star$	$A \to C_1$	
...	....	
...	....	
$p^\star$	$A \to C_p$	
...	....	
...	....	
$q^\star$	$A \to (C_p \to C_{k+1})$	
...	....	
...	....	
$k^\star$	$A \to C_k$	
$k^\star$+1	$(A \to (C_p \to C_{k+1})) \to ((A \to C_p) \to (A \to C_{k+1}))$	A1.2
$k^\star$+2	$(A \to C_p) \to (A \to C_{k+1})$	MP:$k^\star$+1, $q^\star$
$k^\star$+3	$A \to C_{k+1}$	MP:$k^\star$+2, $p^\star$

- C_{k+1} è ottenuta da una riga precedente, diciamo p, via applicazione della regola di generalizzazione posteriore. Allora $\mathcal{D}_{k+1}^\star$ ha la forma:

$$C_1, ..., C_{p-1}, (F \to E(x)), ..., C_k, (F \to \forall x E(x))$$

Per ipotesi di induzione esiste una deduzione $\mathcal{D}_k^\star$ contenente la sottoderivazione $\mathcal{D}_p^\star$ di $A \to (F \to E(x))$. Mostriamo che $\mathcal{D}_k^\star$ è estendibile in una derivazione $\mathcal{D}_{k+1}^\star$ di $A \to (F \to \forall x E(x))$ da M:

.. .	....	
...	....	
$1^\star$	$A \to C_1$	
...	....	
...	....	
$p^\star$	$A \to (F \to E(x))$	
...	....	
...	....	
$k^\star$	$A \to C_k$	
$k^\star + 1$	$A \wedge F \to E(x)$	Import $p^\star$
$k^\star$+2	$A \wedge F \to \forall x E(x)$	GP: $k^\star$+1
$k^\star$+3	$A \to (F \to \forall x E(x))$	Export $k^\star$+2

La regola GP alla riga $k^\star$+2 è applicata correttamente perché la variabile x non è libera né in A né in F. Infatti, in $\mathcal{D}$ siamo passati correttamente da $F \to E(x)$ a $F \to \forall x E(x)$ via GP e questo implica che x non è libera in F ed inoltre x non è libera in A, poiché $\mathcal{D}$ è una deduzione.

- C_{k+1} è ottenuta da una riga precedente, diciamo p, via applicazione della regola di particolarizzazione anteriore. Allora $\mathcal{D}^\star_{k+1}$ ha la forma:

$$C_1, ..., C_{p-1}, (F(x) \to E), ..., C_k, (\exists x F(x) \to E)$$

Per ipotesi di induzione esiste una deduzione $\mathcal{D}^\star_k$ contenente la sottodeduzione $\mathcal{D}^\star_p$ di $A \to (F(x) \to E)$. Mostriamo che $\mathcal{D}^\star_k$ è estendibile in una derivazione $\mathcal{D}^\star_{k+1}$ di $A \to (\exists x F(x) \to E)$ da M:

.. .	....	
...	....	
$1^\star$	$A \to C_1$	
...	....	
...	....	
$p^\star$	$A \to (F(x) \to E)$	
...	....	
...	....	
$k^\star$	$A \to C_k$	
$k^\star$+1	$F(x) \to (A \to E)$	Scambio di prem.: $p^\star$
$k^\star$+2	$\exists x F(x) \to (A \to E)$	PA: $k^\star$+1
$k^\star$+3	$A \to (\exists x F(x) \to E)$	Scambio di prem.: $k^\star$+2

La regola PA alla riga $k^\star$+2 è applicata correttamente perché la variabile x non è libera né in A né in E. Infatti, in $\mathcal{D}$ siamo passati correttamente da $F(x) \to E$ a $\exists x F(x) \to E$ via PA e questo implica che x non è libera in E ed inoltre x non è libera in A, poiché $\mathcal{D}$ è una deduzione.

- C_{k+1} è ottenuta da una riga precedente, diciamo p, via applicazione della regola di sostituzione di variabili libere. Allora $\mathcal{D}^\star_{k+1}$ ha la forma:

$$C_1, ..., C_{p-1}, F(z), ..., C_k, F[t/z]$$

Per ipotesi di induzione esiste una deduzione $\mathcal{D}^\star_k$ di $A \to C_k$ contenente la sottodeduzione $\mathcal{D}^\star_p$ di $A \to F(z)$. Mostriamo che $\mathcal{D}^\star_k$ è estendibile in una derivazione $\mathcal{D}^\star_{k+1}$ di $A \to F[t/x]$ da M:

. ..	....	
...	....	
$1^\star$	$A \to C_1$	
...	....	
...	....	
$p^\star$	$A \to F(z)$	
...	....	
...	....	
$k^\star$	$A \to C_k$	
$k^\star$+1	$(A \to F(z))[t/z]$	SV: $p^\star$
$k^\star$+2	$A \to F(z)[t/z]$	poiché z non occorre libera in A

La regola SV alla riga $k^\star$+1 è applicata correttamente perché t è libero per z in $(A \to F(z))$. Infatti, in $\mathcal{D}$ siamo passati correttamente da $F(z)$ a $F(z)[t/z]$ via SV e quindi t è libero per z in F, inoltre essendo $\mathcal{D}$ una deduzione, z non occorre libera in A quindi non solo t è libero per z in $(A \to F(z))$, ma anche $A[t/z] = A$.

Per il principio di induzione $(\star)$ vale per ogni j, $1 \leq j \leq r$, e dunque anche per r, e così il lemma è dimostrato.

Osservazione 0.3 *Si noti che la dimostrazione del teorema di deduzione offre una procedura effettiva per trasformare una data deduzione di $M, A \vdash B$ in una derivazione di $M \vdash A \to B$ (in questo, come in molti altri casi, la dimostrazione del teorema è più informativa dell'enunciato del teorema).*

Esempio: sia data la seguente deduzione $\mathcal{D}$ di $A \to (A \to B), A \vdash B$:

1	$A \to (A \to B), A \vdash A$	Assunzione
2	$A \to (A \to B), A \vdash A \to (A \to B)$	Assunzione
3	$A \to (A \to B), A \vdash A \to B$	MP.: 1,2
4	$A \to (A \to B), A \vdash B$	MP.: 1,3

Allora $\mathcal{D}^\star$ è:

1_1	$A \to (A \to B) \vdash [A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$	A1.2
1_2	$A \to (A \to B) \vdash A \to ((A \to A) \to A)$	A1.1
1_3	$A \to (A \to B) \vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP.: $1_1, 1_2$
1_4	$A \to (A \to B) \vdash A \to (A \to A)$	A1.1
1_5	$A \to (A \to B) \vdash A \to A$	MP.: $1_3, 1_4$
2_1	$A \to (A \to B) \vdash A \to (A \to B)$	Assunzione
2_2	$A \to (A \to B) \vdash [A \to (A \to B)] \to (A \to [A \to (A \to B)])$	A1.1
2_3	$A \to (A \to B) \vdash A \to (A \to (A \to B))$	MP.: $2_1, 2_2$
3_1	$A \to (A \to B) \vdash A \to (A \to (A \to B)) \to [(A \to A) \to (A \to (A \to B))]$	A1.2
3_2	$A \to (A \to B) \vdash (A \to A) \to (A \to (A \to B))$	MP.: $3_1, 2_3$
3_3	$A \to (A \to B) \vdash A \to (A \to B)$	MP.: $3_2, 1_5$
4_1	$A \to (A \to B) \vdash A \to (A \to (A \to B)) \to ((A \to A) \to (A \to B))$	A1.2
4_2	$A \to (A \to B) \vdash (A \to A) \to (A \to B)$	MP.: $4_1, 3_3$
4_3	$A \to (A \to B) \vdash A \to B$	MP.: $4_2, 1_5$