DEDUZIONE NATURALE

November 13, 2006

Le regole di inferenza consistono di regole di introduzione (I) e regole di eliminazione (E) per ogni costante logica e per il simbolo del falso $\perp$, se occorre nel linguaggio. Per ogni regola le formule sopra la riga sono dette *premesse* e la formula sotto la riga *conclusione* della regola.

La scrittura

$$\begin{array}{c} X \\ \vdots \\ \\ \mathrm{B} \end{array}$$

sta ad indicare che la formula B *dipende* dalle assunzioni occorrenti nell'insieme X.

La scrittura

$$\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \\ \mathrm{B} \end{array}$$

sta ad indicare che la formula A (occorrente fra le *assunzioni* da cui B *dipende*) *può* essere *scaricata* nel corso della deduzione.

Regole di inferenza:

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E \qquad \frac{A \qquad B}{(A \wedge B)} \wedge I$$

$$\frac{A}{A \vee B}\vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee I \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\vee E$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\to I \qquad \frac{A \qquad A \to B}{B}\to E$$

$$\frac{\begin{matrix}X\\ \vdots \\ A(x)\end{matrix}}{\forall x A(x)}\forall I$$

purché x non occorra libera in X.

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t/x)}\forall E$$

purché t sia libero per x in $A(x)$.

$$\frac{A(t/x)}{\exists x A(x)}\exists I$$

purché t sia libero per x in $A(x)$.

$$\frac{\exists x A(x) \qquad \begin{matrix}[A(x)]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B}\exists E$$

purché x non occorra libera in B né in assunzioni da cui B dipende, eccetto $A(x)$.

(a) Regole per la negazione in un linguaggio non contenente il simbolo del falso $\perp$.

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \neg B\end{matrix}}{\neg A}\neg m \qquad \frac{B \qquad \neg B}{A}\neg i \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ \neg B\end{matrix}}{A}\neg c$$

Con **Np** indichiamo la logica *positiva*, ovvero la logica contenente le regole di introduzione ed eliminazione dei connettivi $\wedge$, $\vee$ e $\to$.

Nm, logica *minimale*, è data da **Np** $+\neg m$

Ni, logica *intuizionista*, è data da **Nm** $+\neg i$

Nc, logica *classica*, è data da **Ni** $+\neg c$

(b) Se il linguaggio contiene il simbolo $\perp$ e non contiene la negazione, le regole sono

$$\frac{\perp}{A}\perp i \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A}\perp c$$

Si noti che la regola $\perp i$ è un caso particolare di $\perp c$, esattamente il caso in cui non si scarica alcuna assunzione.

Si noti che non possiamo assiomatizzare la logica minimale se il linguaggio contiene solo $\perp$; infatti non possiamo distinguere tra $\perp$ e $p \wedge \neg p$, distinzione che invece è cruciale per la logica minimale.

In ogni calcolo contenente la regola $\perp i$ possiamo definire il simbolo di negazione attraverso l'implicazione ed il falso: $\neg A =_{df} A \rightarrow \perp$. Infatti

Esercizio. Mostra che nel calcolo Np + $\perp i$ sono derivabili le regole $\neg m$ e $\neg i$ e che nel calcolo Np + $\perp c$ è derivabile anche la regola $\neg c$.

(c) Se il linguaggio contiene il simbolo del falso $\perp$ e la negazione $\neg$, oltre alle regole per $\perp$ dobbiamo avere le seguenti:

$$\frac{B \qquad \neg B}{\perp}\neg E \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\neg A}\neg I$$

Definizione Una *deduzione* è un albero finito di formule tali che

1. le formule associate alle foglie sono dette *assunzioni* e possono essere *scaricate*. Le formule associate alle foglie *dipendono* da se stesse.

2. la formula associata ad un nodo α che non sia una foglia è ottenuta dalle formule associate ai nodi che precedono immediatamente α via applicazione di una regola di inferenza. La formula associata ad α *dipende* da tutte le assunzioni da cui dipendono le premesse della regola eccetto le assunzioni scaricate dall'applicazione della regola stessa.

3. la formula associata alla radice è detta *conclusione*.

Definizione A è *deducibile* da un insieme Γ di formule sse esiste una deduzione di cui A è la conclusione e le cui assunzioni non scaricate sono in Γ.

Esempi di deduzioni

Np $\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^2 \qquad B^1}{A \wedge B}\wedge I}{B \to (A \wedge B)} \to I^1}{A \to (B \to (A \wedge B))} \to I^2$$

Nm $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1 \qquad A \to B^2}{B} \to E \qquad \neg B^3}{\neg A} \neg - m^1}{\neg B \to \neg A} \to I^3}{(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)} \to I^2$$

Attenzione: si possono scaricare anche assunzioni non presenti nella deduzione !!

Np $\vdash B \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{B^1}{A \to B} \to I\,(viene\,scaricata\,\mathrm{A}\,!)}{\vdash B \to (A \to B)} \to I^1$$

Attenzione: si possono scaricare tutte le occorrenze di una stessa formula!!

Np $\vdash A \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1}{A \vee B}\vee I \qquad \dfrac{A^2}{A \vee C}\vee I}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\wedge I}{A \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)}\to I^{1,2}$$

Attenzione: si può scaricare una occorrenza alla volta di una stessa formula!!

Np $\vdash A \to (A \to (A \vee B) \wedge (A \vee C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1}{A \vee B}\vee I \qquad \dfrac{A^2}{A \vee C}\vee I}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\wedge I}{A \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)}\to I^{1}}{A \to (A \to (A \vee B) \wedge (A \vee C))}\to I^{2}$$

Attenzione: nella deduzione che segue si scarica solo la formula da cui $\neg A$ dipende, ovvero $\neg A$ stessa, e non anche la formula da cui A dipende!!

Nm $\vdash A \to \neg\neg A$

$$\dfrac{\dfrac{A^1 \qquad \neg A^2}{\neg\neg A}\neg m^2}{A \to \neg\neg A}\to I^1$$

Nm $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1}{A \vee \neg A}\vee I \qquad \neg(A \vee \neg A)^2}{\neg A}\neg - m^1}{A \vee \neg A}\vee I \qquad \neg(A \vee \neg A)^3}{\neg\neg(A \vee \neg A)}\neg - m^{2,3}$$

Ancora sulle regole per la negazione.

La regola $\neg i$ è un caso particolare di $\neg c$ quello in cui *non* vengono scaricate le assunzioni da cui B e $\neg B$ dipendono. Inoltre la regola $\neg m$ si ottiene da $\neg c$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg A^3 \quad \neg A^4}{A}\,\neg c^4 \qquad \dfrac{\begin{matrix}A^1\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B}\to I^1}{B}\to E \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg A^5 \quad \neg A^6}{}\,\neg c^6 \qquad \dfrac{\begin{matrix}A^2\\ \vdots\\ \neg B\end{matrix}}{A \to \neg B}\to I^2}{\neg B}\to E}{\neg A}\,\neg c^{3,5}.$$

Si noti che dalla sola regola $\neg i$ non si ottiene $\neg m$!

Assiomatizzazione alternativa di **Nc**.

Nc $=$ **Ni** $+ dn$, ove dn è la regola di doppia negazione.

$$\dfrac{\neg\neg A}{A}\,dn$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg A^1\\ \vdots\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\neg A^1\\ \vdots\\ \neg B\end{matrix}}{\neg\neg A}\,\neg m^1}{A}\,dn \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg A \qquad \neg A^1}{A}\,\neg c^1$$

Qualche altro esempio di derivazione

$A \vdash A$ $\qquad\qquad$ A

$\vdash A \to A$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{A^1}{A \to A}\to I^1$

$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to (B \to C)^1 \qquad A^2}{B \to C} \to E \qquad \dfrac{A^2 \qquad A \to B^3}{B} \to E}{C} \to E}{A \to C} \to I^2}{(A \to B) \to (A \to C)} \to I^3}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))} \to I^1$$

Si noti che l'albero sopra la formula C contiene solo regole di eliminazione, mentre la derivazione sotto C solo regole di introduzione. C è chiamata la *formula mediana*.

$\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^1 \qquad A^2}{B} \neg i}{A \to B} \to I^2 \qquad \dfrac{B^3}{A \to B} \to I \qquad \neg A \vee B^4}{A \to B} \vee E^{1,3}}{(\neg A \vee B) \to (A \to B)} \to I^4$$

$$\neg A \to \neg B \vdash B \to A$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \to \neg B \qquad \neg A^1}{\neg B} \to E \qquad B^2}{\neg\neg A} \neg m^1}{A} dn}{B \to A} \to I^2$$

Ancora esempi di deduzioni

$$A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg A^2 \quad \dfrac{A \wedge B^1}{A}\,\wedge E}{\neg(A \wedge B)}\,\neg m^1 \qquad \dfrac{\neg B^3 \quad \dfrac{A \wedge B^2}{B}\,\wedge E}{\neg(A \wedge B)}\,\neg m^2 \qquad \neg A \vee \neg B^4}{\dfrac{\neg(A \wedge B) \qquad\qquad\qquad\qquad A \wedge B}{\neg(\neg A \vee \neg B)}\,\neg m^4}\,\vee I^{2,3}$$

$$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1}{B \to A}\,\to I}{A \to B \vee B \to A}\,\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^2 \qquad A^3}{B}\,\neg i}{A \to B}\,\to I^3}{A \to B \vee B \to A}\,\vee I \qquad A \vee \neg A}{A \to B \vee B \to A}\,\vee I^{1,2}$$

$$\vdash A \vee B \to B \vee A$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1}{A \vee B}\,\vee I \qquad \dfrac{B^2}{A \vee B}\,\vee I \qquad (A \vee B)^3}{B \vee A}\,\vee E^{1,2}}{(A \vee B) \to (B \vee A)}\,\to I^3$$

$$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\wedge B)^1}{A}\wedge E \quad \dfrac{(A\wedge B)^1}{B\vee C}\vee I}{A\wedge(B\vee C)}\wedge I \qquad \dfrac{\dfrac{(A\wedge C)^2}{A}\wedge E \quad \dfrac{(A\wedge C)^2}{B\vee C}\vee I}{A\wedge(B\vee C)}\wedge I \qquad (A\wedge B)\vee(A\wedge C)^3}{A\wedge(B\vee C)}\vee E^{1,2}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\to A\wedge(B\vee C)}\to I^3$$

$$A\wedge(B\vee C)\vdash(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\vee C)}{A}\wedge E \quad B^1}{A\wedge B}\wedge I}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\vee C)}{A}\wedge E \quad C^2}{A\wedge C}\wedge I}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}\vee I \qquad \dfrac{A\wedge(B\vee C)}{B\vee C}\wedge E}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}\vee E^{1,2}$$

$$\vdash\neg\neg(\neg\neg A\to A)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1}{\neg\neg A\to A}\to I \quad \neg(\neg\neg A\to A)^3}{\neg A}\neg m^1 \qquad \neg\neg A^2}{A}\neg i}{\neg\neg A\to A}\to I^2 \qquad \neg(\neg\neg A\to A)^3}{\neg\neg(\neg\neg A\to A)}\neg m^3$$

$\vdash\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)$ Legge di Crisippo

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg A^2$}
\AxiomC{A^1}
\RightLabel{$\neg i$}
\BinaryInfC{B}
\RightLabel{$\to I^1$}
\UnaryInfC{$A \to B$}
\AxiomC{$\neg(A \to B)^4$}
\RightLabel{$\neg m^2$}
\BinaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{$\neg c$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$\neg(A \to B)^4$}
\AxiomC{B^3}
\RightLabel{$\to I$}
\UnaryInfC{$A \to B$}
\RightLabel{$\neg m^3$}
\BinaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$A \wedge \neg B$}
\RightLabel{$\to I^4$}
\UnaryInfC{$\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$}
\end{prooftree}
$$

$\vdash (\neg A \to A) \to A$ *consequentia mirabilis*

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg((\neg A \to A) \to A)^3$}
\AxiomC{$\neg((\neg A \to A) \to A)^3$}
\AxiomC{A^1}
\RightLabel{$\to I$}
\UnaryInfC{$(\neg A \to A) \to A$}
\RightLabel{$\neg m^1$}
\BinaryInfC{$\neg A$}
\AxiomC{$\neg A \to A^2$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to I^2$}
\UnaryInfC{$(\neg A \to A) \to A$}
\RightLabel{$\neg m^3$}
\BinaryInfC{$\neg\neg((\neg A \to A) \to A)$}
\RightLabel{dn}
\UnaryInfC{$(\neg A \to A) \to A$}
\end{prooftree}
$$