Modelli e valutazioni

Novembre, 2004

Sia $\mathcal{L}^=$ un linguaggio predicativo con identità. Un *modello* $\mathcal{M}$ per $\mathcal{L}^=$ è determinato da un insieme non vuoto D e da una funzione di interpretazione I tale che

1. per ogni costante individuale a, $I(a)$ è un elemento di D,
2. per ogni costante enunciativa p, $I(p) = 0$ oppure $I(p) = 1$,
3. per ogni costante predicativa unaria P^1, $I(P^1)$ è un insieme di elementi di D,
   - per ogni costante predicativa binaria P^2, $I(P^2)$ è un insieme di coppie ordinate di elementi di D,
   - per ogni costante predicativa ternaria P^3, $I(P^3)$ è un insieme di triple ordinate di elementi di D,
   - .....
   - per ogni costante predicativa n-aria P^n, $I(P^n)$ è un insieme di n-ple ordinate di elementi di D,

Dato un modello $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$, si consideri il linguaggio $\mathcal{L}^=(D)$ ottenuto aggiungendo una costante individuale d per ogni elemento $\underline{d} \in D$.

Definiamo la valutazione $V^{\mathcal{M}}$ che associa un valore di verità ad ogni enunciato (formula chiusa) di $\mathcal{L}^=(D)$ (e quindi banalmente ad ogni enunciato di $\mathcal{L}^=$) e che soddisfa le seguenti condizioni:

$V^{\mathcal{M}}(p)$	$=$	$I(p)$, ove p è una costante enunciativa,
$V^{\mathcal{M}}(P^n(a_1,\ldots,a_n))=1$	sse	la n-pla ordinata costituita dagli elementi $I(a_1),\ldots,I(a_n)$ di D appartiene all'insieme $I(P^n)$,
$V^{\mathcal{M}}(a=b)=1$	sse	$I(a)=I(b)$
$V^{\mathcal{M}}(\neg B)$	$=$	$1-V^{\mathcal{M}}(B)$
$V^{\mathcal{M}}(B\wedge C)$	$=$	$min[V^{\mathcal{M}}(B),V^{\mathcal{M}}(C)]$
$V^{\mathcal{M}}(B\vee C)$	$=$	$max[V^{\mathcal{M}}(B),V^{\mathcal{M}}(C)]$
$V^{\mathcal{M}}(B\rightarrow C)$	$=$	$max[(1-V^{\mathcal{M}}(B)),\, V^{\mathcal{M}}(C)]$
$V^{\mathcal{M}}(\forall xC(x))$	$=$	$Min\{V^{\mathcal{M}}(C[d/x]) : \underline{d}\in D\}$
$V^{\mathcal{M}}(\exists xC(x))$	$=$	$Max\{V^{\mathcal{M}}(C[d/x]) : \underline{d}\in D\}$

Definizione 0.1 .

- *A è* valida *sse per ogni modello $\mathcal{M}$, $V^{\mathcal{M}}(A)=1$.*
- *A è* conseguenza logica *di $C_1,\ldots,C_n$ see per ogni modello $\mathcal{M}$, se $V^{\mathcal{M}}(C_1)=1$ e .... e $V^{\mathcal{M}}(C_n)=1$ allora $V^{\mathcal{M}}(A)=1$.*

Definizione 0.2 .

- *Se $\mathcal{M}$ è un modello tale che $V^{\mathcal{M}}(A)=1$, diciamo che $\mathcal{M}$ è* modello *di A.*
- *Se $V^{\mathcal{M}}(A)=0$, diciamo che $\mathcal{M}$ è* contromodello *di A.*

Definizione 0.3 .

- *Una formula A è* soddisfacibile *sse per qualche modello $\mathcal{M}$, $V^{\mathcal{M}}(A)=1$.*
- *Una formula A è* insoddisfacibile *sse per ogni modello $\mathcal{M}$, $V^{\mathcal{M}}(A)=0$.*

Definizione 0.4 .

- *L'insieme $\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ è* soddisfacibile *sse per qualche modello $\mathcal{M}$, $V^{\mathcal{M}}(B_1)=1$ e ... e $V^{\mathcal{M}}(B_n)=1$.*
- *L'insieme N è* soddisfacibile *sse per qualche modello $\mathcal{M}$, $V^{\mathcal{M}}(B)=1$ per ogni $B\in N$.*

Esercizio Mostra che B è conseguenza logica di $C_1,\ldots,C_n$ sse l'insieme $\{C_1,\ldots,C_n,\neg B\}$ non è *soddisfacibile*.

Nota La valutazione $V^{\mathcal{M}}$ può essere definita equivalentemente così:

1. $V^{\mathcal{M}}(p) = I(p)$
2. $V^{\mathcal{M}}(P^n(a_1, \ldots, a_n)) = 1$ sse la n-pla ordinata costituita dagli elementi $I(a_1), \ldots, I(a_n)$ di D appartiene all'insieme $I(P^n)$,
3. $V^{\mathcal{M}}(\neg B) = 1$ sse $V^{\mathcal{M}}(B) = 0$
4. $V^{\mathcal{M}}(B \wedge C) = 1$ sse $V^{\mathcal{M}}(B) = V^{\mathcal{M}}(C) = 1$
5. $V^{\mathcal{M}}(B \vee C) = 0$ sse $V^{\mathcal{M}}(B) = V^{\mathcal{M}}(C) = 0$
6. $V^{\mathcal{M}}(B \to C) = 0$ sse $V^{\mathcal{M}}(B) = 0$ oppure $V^{\mathcal{M}}(C) = 1$
7. $V^{\mathcal{M}}(\forall x C(x)) = 1$ sse $V^{\mathcal{M}}(B[d/x] = 1)$ per ogni $\underline{d} \in D$
8. $V^{\mathcal{M}}(\exists x C(x)) = 1$ sse $V^{\mathcal{M}}(B[d/x] = 1)$ per qualche $\underline{d} \in D$

Importante! La seguente definizione alternativa è molto usata.

Dato un modello $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$, invece di definire quand' è che la valutazione $V^{\mathcal{M}}$ associa valore 1 ad un enunciato A, si può definire equivalentemente quand' è che un enunciato A è *vero in* $\mathcal{M}$, in simboli $\mathcal{M} \models A$.

1. $\mathcal{M} \models p$ sse $I(p) = 1$,
2. $\mathcal{M} \models P^n(a_1, \ldots, a_n)$ sse la n-pla ordinata costituita dagli elementi $I(a_1), \ldots, I(a_n)$ di D appartiene all'insieme $I(P^n)$,
3. $\mathcal{M} \models \neg B$ sse $\mathcal{M} \not\models B$
4. $\mathcal{M} \models B \wedge C$ sse $\mathcal{M} \models B$ e $\mathcal{M} \models C$
5. $\mathcal{M} \models B \vee C$ sse $\mathcal{M} \models B$ oppure $\mathcal{M} \models C$
6. $\mathcal{M} \models B \to C$ sse $\mathcal{M} \not\models B$ oppure $\mathcal{M} \models C$
7. $\mathcal{M} \models \forall x C(x)$ sse $\mathcal{M} \models B[d/x]$, per ogni $\underline{d} \in D$
8. $\mathcal{M} \models \exists x C(x)$ sse $\mathcal{M} \models B[d/x]$, per qualche $\underline{d} \in D$

E' facile mostrare che per ogni enunciato A

$$V^{\mathcal{M}}(A) = 1 \quad \text{sse} \quad \mathcal{M} \models A.$$

Teorema 0.5 (Teorema di validità per $K^=$) .

$$\textit{Se} \ \vdash_{K^=} A \quad \textit{allora} \quad \models A.$$

$$\textit{Se} \ N \vdash_{K^=} A \quad \textit{allora} \quad N \models A.$$

Dimostrazione. Per induzione sulla lunghezza della derivazione di A in $K^=$.