INDUZIONE MATEMATICA

Il principio di induzione matematica è un metodo dimostrativo che 'fa esplicito riferimento ai numeri naturali'. ... 'Il riferimento che il principio di induzione fa ad un insieme particolare, quello dei numeri naturali, contrasta in apparenza col fatto che le dimostrazioni per induzione si incontrano nei più diversi campi della matematica, ben al di là dell'aritmetica.' ... 'E' quindi dovuto alla pervasività dei numeri naturali come strumento di indagine il fatto che un risultato che li concerne diventi un metodo dimostrativo di uso così generale e frequente. (Bellissima e Pagli, *La verità trasmessa*, p. 59.)

Principio di induzione matematica:
$A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x+1)) \rightarrow \forall x A(x)$

Principio di induzione sul decorso dei valori:
$A(0) \wedge \forall x(A(0) \wedge A(1) \wedge \cdots \wedge A(x) \rightarrow A(x+1)) \rightarrow \forall x A(x)$

Principio di induzione completa:
$\forall x(\forall y(y < x \rightarrow A(y)) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x A(x)$

Principio del minimo:
$A(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge \forall z(z < y \rightarrow \neg A(z)))$

Principio della discesa infinita:
$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(y < x \wedge A(y))) \rightarrow \forall x \neg A(x)$

Facciamo vedere che l'*induzione completa* è equivalente al *principio del minimo.*
$\forall x(\forall y(y < x \rightarrow \neg A(y)) \rightarrow \neg A(x)) \rightarrow \forall x \neg A(x)$
$\exists x A(x) \rightarrow \exists x(\forall y(y < x \rightarrow \neg A(y)) \wedge A(x))$
$\exists x A(x) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge \forall y(y < x \rightarrow \neg A(y)))$

Facciamo vedere che il *principio del minimo* è equivalente al *principio della discesa infinita.*

$$\forall x(\forall y(y < x \to \neg A(y)) \to \neg A(x)) \to \forall x \neg A(x)$$
$$\forall x(A(x) \to \neg\forall y(y < x \to \neg A(y))) \to \forall x \neg A(x)$$
$$\forall x(A(x) \to \exists y(y < x \wedge A(y))) \to \forall x \neg A(x)$$

Facciamo vedere che l'induzione matematica implica l'induzione sul decorso dei valori.

$$\dfrac{\dfrac{A0}{Q0}\,def \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Qx^1}{A0 \wedge \cdots \wedge Ax}\,def \quad \dfrac{\forall x(A0 \wedge \cdots \wedge Ax \to A(x+1))}{A0 \wedge \cdots \wedge Ax \to A(x+1)}\,\forall E}{A(x+1)}\,\to E \quad \dfrac{Qx^2}{A0 \wedge \cdots \wedge Ax}\,def}{A0 \wedge \cdots \wedge A(x+1)}\,\wedge I}{Q(x+1)}\,def}{Qx \to Q(x+1)}\,\to I^{1,2}}{\forall x(Qx \to Q(x+1))}\,\forall I}{\forall x Qx}\,Ind.\,matematica$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x Qx}{Qx}\,\forall E}{A0 \wedge \cdots \wedge Ax}\,def}{Ax}\,\wedge E}{\forall x Ax}\,\forall I$$

Facciamo vedere che l'induzione sul decorso dei valori implica l'induzione matematica.

$$\dfrac{A0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A0 \wedge \cdots \wedge Ax^1}{Ax}\,\wedge E \quad \dfrac{\forall x(Ax \to A(x+1))}{Ax \to A(x+1)}\,\forall E}{A(x+1)}\,\to E}{A0 \wedge \cdots \wedge Ax \to A(x+1)}\,\to I^1}{\forall x(A0 \wedge \cdots \wedge Ax \to A(x+1))}\,\forall I}{\forall x Ax}\,Ind.\,sul\,decorso\,dei\,valori$$

Facciamo vedere che l'induzione sul decorso dei valori implica l'induzione completa.

$$\dfrac{A(0) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x[\forall y(y<x\to Ay)\to Ax]^3}{\forall y(y<x+1\to Ay)\to A(x+1)}\,\forall E \qquad \dfrac{A0\wedge\cdots\wedge Ax^1}{\forall y(y<x+1\to Ay)}\,arit}{A(x+1)}\,\to E}{A0\wedge\cdots\wedge Ax\to A(x+1)}\,\to I}{\forall x[A0\wedge\cdots\wedge Ax\to A(x+1)]}\,\forall I^1}{\forall x Ax}\ Ind.\ sul\ decorso\ dei\ valori$$

Che valga $A0$ si giustifica così

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{arit.}{\neg(0<0)} \qquad 0<0^1}{A0}\,\neg\, int.}{0<0\to A0}\,\to I^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x[\forall z(z<x\to Az)\to Ax]}{\forall z(z<x\to Az)\to Ax}\,\forall E}{(0<0\to A0)\to A0}\,\forall E}{A0}\,\to E$$

Facciamo vedere che l'induzione completa implica l'induzione sul decorso dei valori.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x=0^2 \quad A0}{A(x)}\,id.}{\forall y(y<x\to Ay)\to Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x>0^3 \quad \forall x[A0\wedge\cdots\wedge Ax\to A(x+1)]}{A0\wedge\cdots\wedge A(x-1)\to Ax}\,\forall E \qquad \dfrac{x>0^4 \quad \forall y(y<x\to Ay)^1}{A0\wedge\cdots\wedge A(x-1)}\,arit.}{A(x)}\,\to E}{\forall y(y<x\to Ay)\to Ax}\,\to I^1}{\forall y(y<x\to Ay)\to Ax}\,\vee E^{2,3,4}}{\forall x(\forall y(y<x\to Ay)\to Ax)}\,\forall I}{\forall x A(x)}\ Ind.\ completa$$

Per applicare la regola di $\vee E$, occorre un'ulteriore premessa, ovvero $x=0\vee x>0$, ma questa è una verità aritmetica e la consideriamo come data.

Riportiamo qui di seguito anche la dimostrazione di Mendelson, p.113, che l'induzione matematica implica l'induzione completa.

$$
\dfrac{
\dfrac{z < x+1^{4} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{Bx^{1}}{\forall z(z \le x \to Az)}\,def}{\forall z(z < x+1 \to Az)}\,arit.}{z < x+1 \to Az}\,\forall E}{Az}\,\to E
\qquad
\dfrac{z = x+1^{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{Bx^{2}}{\forall z(z \le x \to Az)}\,def}{\forall z(z < x+1 \to Az)}\,arit. \qquad \dfrac{\forall x[\forall z(z < x \to Az) \to Ax]}{\forall z(z < x \to Az) \to A(x+1)}\,\forall E}{A(x+1)}\,\to E}{Az}\,id.
}{Az}\,\vee E^{4,5}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Az}{z \le x+1 \to Az}\,\to I}{\forall z(z \le x+1 \to Az)}\,\forall I}{B(x+1)}\,def}{Bx \to B(x+1)}\,\to I^{1,2}}{\forall x(Bx \to B(x+1))}\,\forall I}{\forall x Bx}\quad Ind.\,matematica}{\forall x(\forall z(z \le x \to Az))}\,def}{\forall z(z \le x \to Az)}\,\forall E}{x \le x \to Ax}\,\forall E}{Ax}\,\to E\,(con\ x \le x)}{\forall x Ax}
$$

Per applicare la regola di $\vee E$, occorre una terza premessa $z < x+1 \vee x = x+1$, ma questa è derivabile dall'assunzione $z \le x+1$ che poi scarichiamo con la regola $\to E$. Ancora, per applicare il principio di induzione matematica occorre anche la premessa $B0$. Non l'abbiamo scritta solo per motivi di spazio. Dall'assunzione $\forall x[\forall z(z < x \to Az) \to Ax]$ ricaviamo $A0$ esattamente con la dimostrazione vista sopra, dall'aritmetica sappiamo che $A0$ è equivalente a $\forall z(z \le 0 \to Az)$ che, per definizione, non è altro che $B0$.