Esistenza e infinito in matematica

Giovanna Corsi

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Collegio Superiore - Maggio, 2007

Il lato del quadrato doppio

Qual è quel numero che moltiplicato per se steso dà 2 ?

Seguendo Imre Toth lo chiamiamo $2^\star$

$$2^\star \cdot 2^\star = 2$$

Esiste?

Dal *Menone* di Platone:

....

Socrate Se questo lato fosse di due piedi e lo stesso quest'altro, di quanti piedi sarebbe l'intera superficie ?

...

Schiavo Quattro, Socrate.

Socrate Non vi potrebbe essere un'altra superficie, doppia di questa ma simile, avente tutti i suoi lati uguali, come questa?

Schiavo Sì.

Socrate Di quanti piedi sarà?

Schiavo Otto.

Socrate Prova a dirmi allora quanto sarà lungo ciascun lato di essa. Il lato di questa è di due piedi; quant'è quello della superficie doppia?

"... C'è allora il lato del quadrato doppio, e moltiplicato per se stesso dà un'area di 8 piedi quadrati: è qualcosa di esistente e di dotato di grandezza. Però - e veniamo al vero nodo drammatico dell'intreccio - non ne discende automaticamente che abbia una lunghezza definita." [da *Lo schiavo di Menone*, di Imre Toth pp.XIII-XV, Vita e Pensiero, 1998]

“La convinzione che anima Socrate emerge nella penultima battuta (83 E 11 - 84 A 1) : *esiste* una misura ‘esatta’ del lato del quadrato doppio, *anche se non se ne può determinare il valore* con le operazioni di ‘calcolo’ (logizestai) della matematica tradizionale, che è quella pitagorica, dove l’irrazionale non è né può essere numero e misura.” [da Toth, p. XV]

Il lato del quadrato doppio

La diagonale ed il lato di un quadrato non sono commensurabili

ne discende che

La lunghezza della diagonale di un quadrato non è un numero razionale

Il lato del quadrato doppio

La diagonale ed il lato di un quadrato non sono commensurabili

ne discende che

La lunghezza della diagonale di un quadrato non è un numero razionale

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la diagonale d ed il lato l siano commensurabili. Ne segue che esistono numeri naturali a e b tali che

$$d = \frac{a}{b}\ l$$

,
ove a e b sono primi fra loro. Allora

$$d^2 = \frac{a^2}{b^2}\ l^2$$

Dal fatto che $d^2 = 2l^2$, abbiamo

$$2l^2 = \frac{a^2}{b^2}\ l^2$$

da cui

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Ma allora

$$2b^2 = a^2$$

dunque a^2 è pari. Ne segue che a **è pari**. Sia dunque $a = 2c$ per qualche c. Allora

$$2b^2 = 4c^2$$

$$b^2 = 2c^2$$

dunque b^2 è pari, ma allora anche b **è pari** .

Dunque a e b sono entrambi pari in contraddizione col fatto di essere primi fra loro.

“... Ciascuno di essi conserva la freschezza e l’importanza di quando è stato scoperto: 2000 anni non vi hanno lasciato una ruga. Questa è una dimostrazione per *reductio ad absurdum*, e la *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. E’ un gambetto molto più raffinato di qualsiasi gambetto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre *la partita*.” [da *Apologia di un matematico*, di Godfrey H.Hardy, p.73]

antanairesis
resti reciproci

Il ragionamento di Socrate percorre per un tratto il procedimento di misurazione di un segmento di retta, che Aristotele chiama *antanairesis*. [Menone, 82 E - 84 A]

Tale processo si basa sul fatto che due grandezze s_0 e d_0 (per semplicità assumiamo $s_0 < d_0 < 2s_0$) sono commensurabili sse lo sono i seguenti resti $(d_0 - s_0)$ e $(2s_0 - d_0)$.

Se $(d_0 - s_0) > (2s_0 - d_0)$, poniamo

$$d_1 = (d_0 - s_0) \quad e \quad s_1 = (2s_0 - d_0)$$

se $(d_0 - s_0) < (2s_0 - d_0)$, poniamo

$$d_1 = (2s_0 - d_0) \quad e \quad s_1 = (d_0 - s_0)$$

In ogni caso abbiamo che le nuove grandezze sono esprimibili in funzione di d_0 e s_0.

$$d_0 = s_0 + d_1 \quad e \quad s_0 = s_1 + d_1$$

infatti $2s_0 = (s_1 + d_0) \; = \; (s_1 + d_1 + s_0); \quad e \, s_0 = (s_1 + d_1)$

oppure

$$d_0 = s_0 + s_1 \quad e \quad s_0 = s_1 + d_1$$

.

infatti $2s_0 = (d_1 + d_0) \; = \; (d_1 + s_1 + s_0); \quad e \, s_0 = (d_1 + s_1)$

In generale

Se $(d_n - s_n) > (2s_n - d_n)$, poniamo

$$d_{n+1} = (d_n - s_n) \quad e \quad s_{n+1} = (2s_n - d_n)$$

se $(d_n - s_n) < (2s_n - d_n)$, poniamo

$$d_{n+1} = (2s_n - d_n) \quad e \quad s_{n+1} = (d_n - s_n)$$

Vale che

$$d_n = s_n + d_{n+1} \quad e \quad s_n = s_{n+1} + d_{n+1}$$

oppure

$$d_n = s_n + s_{n+1} \quad e \quad s_n = s_{n+1} + d_{n+1}$$

Quindi se per qualche n, s_{n+1} e d_{n+1} sono commensurabili, lo sono anche s_0 e d_0 e $d_0 = k \times s_{n+1}$, per qualche k intero.

Note. Al passo 0, s_0 è l'unità di misura e d_0 il segmento da misurare. Al passo 1, s_0 viene diviso in due segmenti di cui il più piccolo diviene (la prossima) unità di misura rispetto a cui il più grande viene misurato, e così via finché non si trova un s_n, se esiste, che viene scomposto in due segmenti di cui uno è multiplo esatto dell'altro.

Dato un quadrato di lato s_0 e di diagonale d_0, col processo antanairetico si determina una successione infinita di resti per difetto e per eccesso $\langle s_{n+1}, d_{n+1} \rangle$, $n \leq 0$, ove $s_0(d_0)$ è il lato (la diagonale) del quadrato di partenza e $s_{n+1}(d_{n+1})$, $n \leq 0$, è il lato (la diagonale) del quadrato che si ottiene all' n+1-esimo passo del processo antanairetico. In particolare abbiamo

$$s_1 = d_0 - s_0$$
$$d_1 = 2s_0 - d_0.$$

$$s_{n+1} = d_n - s_n$$
$$d_{n+1} = 2s_n - d_n.$$

processo antanairetico	esprimiamo tutte le grandezze in funzione di s_0 e d_0	poniamo $s_0 = 1$ e $d_0 = 2^\star$, ove ${2^\star}^2 = 2$	calcoliamo $2^\star$	valori approssimati di $2^\star$
$s_1 = d_0 - s_0$ $d_1 = 2s_0 - d_0$	$s_1 = d_0 - s_0$ $d_1 = 2s_0 - d_0$	$s_1 = 2^\star - 1$	$2^\star = s_1 + 1$	$2^\star > 1$
$s_2 = d_1 - s_1$	$s_2 = 3s_0 - 2d_0$	$s_2 = 3 - 2 \times 2^\star$	$2^\star = 3/2 - s_2/2$	$2^\star < 3/2$
$d_2 = 2s_1 - d_1$	$d_2 = 3d_0 - 4s_0$			

$s_1 = d_0 - s_0$ $d_1 = 2s_0 - d_0$	$s_1 = d_0 - s_0$	$d_0 = s_0 + s_1$	$d_0 > 1$
$s_2 = d_1 - s_1$ $d_2 = 3d_0 - 4s_0$	$s_2 = 3s_0 - 2d_0$	$2d_0 = 3s_0 + s_2$	$d_0 < 3/$
$s_3 = d_2 - s_2$ $d_3 = 10s_0 - 7d_0$	$s_3 = 5d_0 - 7s_0$	$5d_0 = 7s_0 + s_3$	$d_0 > 7/$
$s_4 = d_3 - s_3$ $d_4 = 17d_0 - 24s_0$	$s_4 = 17s_0 - 12d_0$	$12d_0 = 17s_0 - s_4$	$d_0 < 17/$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$1 \quad 7/5 \quad 41/29 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad 2^\star \quad \leftarrow \quad \leftarrow$
$99/70 \quad 17/12 \quad 3/2$

Diadi effabili

E' ben vero che non esistono numeri naturali n e m tali che

$$n^2 = 2m^2$$

$$\text{ovvero, } (n^2 - 2m^2) = 0$$

ma possiamo approssimare tale situazione al meglio poich esistono numeri naturali n e m tali che

$$|n^2 - 2m^2| = 1$$

n la lunghezza della *diagonale razionale* del quadrato di lato m

Definiamo la successione delle diadi effabili:

$[D_0,\, S_0] = [1, 1]$

$[D_{k+1},\, S_{k+1}] = [D_k + 2S_k,\, D_k + S_k]$. Ne segue

$$[D_0,\, S_0] = [1,\ 1]$$

$$[D_1,\, S_1] = [3,\ 2]$$

$$[D_2,\, S_2] = [7,\ 5]$$

$$[D_3,\, S_3] = [17,\ 12]$$

$$[D_4,\, S_4] = [41,\ 29]$$

$$[D_5,\, S_5] = [99,\ 70]$$

$$\cdots\cdots$$

D_{2k} approssima **per difetto** la diagonale del quadrato di lato S_{2k}.
D_{2k+1} approssima **per eccesso** la diagonale del quadrato di lato S_{2k+1}.

$[1, 1] \quad [7, 5] \quad [41, 29] \quad [239, 169] \quad \rightarrow \quad \rightarrow$

$2^{\star}$

$\leftarrow \quad \leftarrow \quad [577, 408] \quad [99, 70] \quad [17, 12] \quad [3, 2]$

$1 \qquad 1,4 \qquad 1,413 \qquad 1,414201 \quad \rightarrow \quad \rightarrow$

$2^{\star}$

$\leftarrow \quad \leftarrow \quad 1,414215 \quad 1,41428 \quad 1,416 \quad 1,5$

Nota. Se si indica con s_{k+1} lo scarto tra il *valore vero* della diagonale del quadrato di lato s_k ed il suo valore approssimato d_k, vediamo che

$s_0 > s_1 > s_2 > ...$

Infatti l'area dello gnomone, differenza tra d_k^2 e $(d_0\, s_k)^2$, è sempre uguale al quadrato unitario e quindi la sua base diminuisce con l'aumentare della lunghezza dei lati dei quadrati.

"Ma ecco che i Pitagorici hanno scoperto che l'antanairesi della diagonale d e del lato s di un quadrato Q - equivalente al processo di misurazione del lato s^* del quadrato duale Q^* da parte del lato s - genera per necessità intrinseca la succesione infinita dei numeri D_n e S_n delle diadi Δ_n. E quando Proclo, dando un resoconto dettagliato di questa scoperta parla del *teorema elegante (glafuron) dei Pitagorici*, il suo complimento era ed è sempre perfettamente giustificato." [Toth]

La scoperta di questa analogia di struttura fra *N*umero e *F*igura, fra il mondo chiuso delle diagonali effabili Δ_n - discendenti dalla diade monadica Δ_1 e l'universo infinito dei quadrati Q_n - generati dall'antanairesi inifinita del lato s_0 e dalla diagonale d_0 di un quadrato iniziale Q_0 - dovette costituire alla sua epoca un evento matematico inatteso, un risultato di una novità assolutamente sorprendente." [p. 45].

"La perfetta traducibilità del linguaggio geometrico nell'idioma aritmetico, che ci offre il teorema elegante dei Pitagorici, ha a buon titolo affascinato Teone, Giamblico e Proclo. Il teorema non si limita ad essere elegante, ma cela una ricchezza di idee matematiche, la cui straordinaria efficacia e il cui accattivante significato sono divenuti evidenti non prima dell'Ottocento, con l'elaborazione dell'algebra moderna. In effetti quello che hanno scoperto i Pitagorici è un'identità di struttura puramente algebrica o, in termini tecnici, l'*isomorfismo* del mondo chiuso delle diadi Δ_n e dell'universo autonomo, e altrettanto chiuso in sè, delle figure geometriche dei quadrati antanairetici Q_n." [pp.59-60]