Tavole semantiche*

Ottobre 2003

1 Preliminari insiemistici

Riassumiamo brevemente alcune nozioni di teoria ingenua degli insiemi che verranno utilizzate nei paragrafi seguenti.

La nozione di **insieme** viene data per intuitiva e non analizzata. Similmente, diamo per intuitiva la nozione di **funzione** $f : X \longrightarrow Y$ fra gli insiemi X e Y: la f viene genericamente definita come una 'legge' che ad ogni elemento di X (detto insieme dominio) fa corrispondere uno ed un solo elemento di Y (detto insieme codominio). Raddoppiare un numero per esempio è una funzione dall'insieme N dei numeri naturali in sè. Considerare la madre, è una funzione dall'insieme degli esseri umani nell'insieme degli esseri umani di sesso femminile. Invece, considerare i figli non è una funzione dall'insieme degli esseri umani verso l'insieme degli esseri umani per ben due motivi: non tutti gli esseri umani hanno figli e non tutti ne hanno uno solo, sicchè viene violato il tratto distintivo della nozione di funzione che, ripetiamo, consiste nell'essere una corrispondenza *sempre definita* e *definita in modo univoco*.

La nozione di **prodotto cartesiano** di n-insiemi $X_1, \ldots, X_n$ è la seguente: il prodotto cartesiano, che scriviamo con

$$X_1 \times \cdots \times X_n$$

è l'insieme delle liste $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ di n elementi (dette n-ple) di elementi appartenenti, rispettivamente, ad $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Così ad esempio, l'insieme

*a cura di Giovanna Corsi, liberamente tratto da *Corso Propedeutico di Logica* di Franchella, Ghilardi, Sacchetti.

dei 'vestiti interi spezzati' è il prodotto cartesiano dell'insieme delle giacche e dell'insieme dei pantaloni; un altro esempio è fornito dai punti del piano che si possono identificare con le coppie di punti presi uno dalla retta delle ascisse e uno dalla retta delle ordinate.

Quando $X_1, \ldots, X_n$ concidono tutti con uno stesso insieme X, usiamo la notazione X^n per indicare il relativo prodotto cartesiano, detto anche **potenza** n-esima dell'insieme X. Per $n = 1$, X^1 è X stesso; per $n = 0$, è utile identificare la potenza 0-esima di X con l'insieme (detto terminale) $\mathbf{1}$ definito come un qualsiasi insieme con un elemento solo (ad esempio $\mathbf{1} = \{*\}$). Si noti che una funzione

$$c : \mathbf{1} \longrightarrow X$$

è univocamente specificata una volta noto l'elemento $c(*) \in X$; quindi le funzioni $\mathbf{1} \longrightarrow X$ possono a buon diritto essere identificate con gli elementi di X stesso.

Un **sottoinsieme** di un insieme X è un insieme composto da alcuni (magari nessuno, magari tutti) degli elementi di X.

L'insieme delle **parti** $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X. Ad esempio, $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ consta dei due elementi

$$\emptyset, \qquad \{*\}.$$

Ci tornerà utile identificare questi due sottoinsiemi con i due valori di verità, rispettivamente 'falso' e 'vero', che abbiamo già incontrato nel caso proposizionale.

Una **relazione** n-aria su un insieme X è un sottoinsieme della potenza n-esima di X (per $n = 1$, dunque, una relazione unaria è semplicemente un sottoinsieme e, per $n = 0$, una relazione n-aria su X è un valore di verità). Ad esempio, la relazione 'essere amico di' è la relazione che contiene le coppie di esseri umani che sono amici tra di loro; 'essere minore di' è l'ovvia relazione fra numeri naturali che tutti conosciamo (tale relazione conterrà ad esempio le coppie $\langle 2, 3\rangle, \langle 12, 45\rangle, \ldots$, ma non la coppia $\langle 3, 2\rangle$).

2 Linguaggio e strutture

Un *alfabeto* è un insieme non vuoto. I suoi elementi sono detti *simboli* dell'alfabeto. Una *parola* di un alfabeto $\mathfrak{G}$ è una successione finita (anche vuota) di simboli di $\mathfrak{G}$. La *parola vuota* è denotata da Λ. Il *prodotto* o *concatenazione* delle parole A e B è la parola AB. Una parola B è detta *sottoparola* di una parola A se $A = CBD$ per qualche C e D. Una parola B può occorrere in A come sottoparola più volte. Il *risultato del rimpiazzamento* di una occorrenza di una sottoparola B in una parola CBD con una parola E è definito come la parola CED.

Il *risultato della sostituzione* $A(a \setminus B)$ di una parola B per un simbolo a in una parola A è definito come la parola ottenuta per rimpiazzamento simultaneo di tutte le occorrenze del simbolo a in A con B;

$$A(a_1 \setminus B_1, \ldots, a_n \setminus B_n)$$

denota il risultato della sostituzione simultanea di B_1 per a_1 e ... e di B_n per a_n in A.

Siano I, J, K insiemi arbitrari. Consideriamo un alfabeto $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \cup \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3 \cup \mathfrak{G}_4 \cup \mathfrak{G}_5 \cup \mathfrak{G}_6 \cup \mathfrak{G}_7$, dove

$\mathfrak{G}_0 = \{p_0,\ p_1,\ p_2, \ldots\}$ – *variabili enunciative* o *proposizionali*,
$\mathfrak{G}_1 = \{v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots\}$ – *variabili individuali*,
$\mathfrak{G}_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathfrak{N})$ – *simboli per predicati*,
$\mathfrak{G}_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathfrak{N})$ – *simboli per funzioni*,
$\mathfrak{G}_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ – *costanti individuali*,
$\mathfrak{G}_5 = \{\wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \neg,\ \forall,\ \exists\}$ – *simboli logici*,
$\mathfrak{G}_6 = \{\ ,\ (\ )\ \}$ – *simboli ausiliari*,
$\mathfrak{G}_7 = \{\ \Rightarrow\}$ – *simbolo di sequente*.

$P_i^{n_i}$ è detto un *simbolo per predicato n_i-ario*, $f_j^{n_j}$ *simbolo per funzione n_j-ario*.

L'insieme $\sigma = \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3 \cup \mathfrak{G}_4$ è detto *segnatura*. Fissiamo una segnatura σ e definiamo tre importanti nozioni:

termini di segnatura σ

formule di segnatura σ

strutture di segnatura σ

Definiamo i *termini di segnatura σ* induttivamente:

1. Variabili individuali e costanti individuali sono termini.

2. Se f^n è un simbolo per funzione n-ario di σ e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.

Un termine è detto *chiuso* o *ground* se non contiene variabili.

La scrittura $t(x_1, \dots, x_n)$ indica che il termine t è costruito usando al più le variabili $x_1, \dots, x_n$.

Una *formula atomica di segnatura* σ è una variabile proposizionale o una parola $P^n(t_1, \dots, t_n)$, dove P^n è un simbolo per predicato n-ario di σ e $t_1, \dots, t_n$ sono termini di segnatura σ.

Definiamo le *formule di segnatura* σ:

1. Ogni formula atomica è una formula.
2. Se A e B sono formule, allora $\neg A$, $(A \to B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ sono formule.
3. Se A è una formula e x una variabile individuale, allora $\forall x A$ e $\exists x A$ sono formule. (In questo caso $\forall x A$ e $\exists x A$ sono detti gli *ambiti del quantificatore* $\forall x$ o $\exists x$, rispettivamente.)

Un *sottotermine* di un termine t è una sottoparola di t che è esso stesso un termine.

Una *sottoformula* di una formula A è una sottoparola di A che è essa stessa una formula.

Una occorrenza di una variabile in una formula è detta *vincolata* se occorre nell'ambito di $\forall x$ o $\exists x$ e *libera* altrimenti. Una variabile x è detta *variabile libera* di una formula A se ha una occorrenza libera in A, e *variabile vincolata* di A se ogni sua occorrenza è vincolata in A. Una formula senza variabili libere è detta *enunciato* o *formula chiusa*.

Un termine t è detto *libero per la variabile x in una formula A* se non ci sono occorrenze libere di x in A nell'ambito di un quantificatore $\forall y$ or $\exists y$, dove y è una variabile che occorre in t. Nel seguito useremo i simboli $x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2, \dots$ per denotare variabili individuali, $t_1,\ t_2, \dots$ per denotare termini e $A,\ B, \dots$ per denotare formule. Quando siamo interessati in una formula A e nelle variabili $x_1, \dots, x_n$, useremo la notazione $A(x_1, \dots, x_n)$. Se $A(x_1, \dots, x_n)$ è una formula, $A(t_1, \dots, t_n)$ denota il *risultato della sostituzione* dei termini $t_1, \dots, t_n$ per tutte le occorrenze libere delle variabili $x_1, \dots, x_n$.

Convenzioni notazionali:

Valgono le solite convenzioni per eliminare le parentesi: stipuliamo che $\neg$, $\forall$ e $\exists$ leghino più strettamente di $\wedge$ e $\vee$, i quali a loro volta legano più strettamente di $\to$ e $\leftrightarrow$.

Un *sistema algebrico* o una *struttura* $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$ *di segnatura* σ è definito come un insieme non vuoto M insieme con una interpretazione tale che ogni simbolo per predicato (funzione) n-ario di σ è interpretato come un predicato (funzione) n-ario su M, ogni costante individuale di σ come un elemento di M. I predicati (funzioni) su M corrispondenti ai simboli di σ sono denotati da $\hat{P}^n$ ($\hat{f}^n$) [o dagli stessi simboli P^n f^n ove non sorga confusione]; l'elemento di M che corrisponde ad una costante individuale c è denotato da c_M [o $\hat{c}$ o semplicemente da c se non c'è pericolo di confusione].

Le variabili enunciative appartenenti a $\mathfrak{G}_0$ sono interpretate su sottoinsiemi di $M^0 = \{\star\}$ e quindi assumono valori nell'insieme $\{\emptyset, \{\star\}\}$ che possiamo identificare con l'insieme dei valori di verità $\{0, 1\}$.

L'insieme M è detto l' *universo* di $\mathfrak{M}$.

La *cardinalità* di una struttura $\mathfrak{M}$ è definita come la cardinalità del suo universo ed è denotata da $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$.

Assumiamo che $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$. Una struttura $\mathfrak{M}_1 = \langle M; \sigma_1 \rangle$ è detta un *ridotto* di una struttura $\mathfrak{M}_2 = \langle M; \sigma_2 \rangle$, e $\mathfrak{M}_2$ è detta una *espansione* di $\mathfrak{M}_1$ se i simboli di σ_1 sono interpretati in $\mathfrak{M}_1$ e in $\mathfrak{M}_2$ nello stesso modo.

Assumiamo che $M_1 \subseteq M_2$. Una struttura $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$ è detta *sottostruttura* di $\mathfrak{M}_2 = \langle M_2; \sigma \rangle$ e $\mathfrak{M}_2 = \langle M_2; \sigma \rangle$ è detta *estensione* di $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1; \sigma \rangle$ se tutti i simboli σ sono interpretati in $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ (sugli elementi di M_1) nello stesso modo. Se $M_1 \neq M_2$, la sottostruttura (estensione) è detta *propria.*

Assumiamo che tutte le variabili di un termine t di segnatura σ siano fra $x_1, \ldots, x_k$, e sia $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$ una struttura. Il *valore di t per i valori $m_1, \ldots, m_k$ delle variabili* è definito per induzione:

1. Se t è una variabile x_i, il valore di t è m_i.

2. Se t è una costante c in σ, il valore t è l' elemento di M dato dall'interpretazione di c in $\mathfrak{M}$.

3. Se t è $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ e i valori di $t_1, \ldots, t_n$ sono $m_1, \ldots, m_n$, allora il valore di t è $\hat{f}^n(m_1, \ldots, m_n)$.

Per definire quand'è che un enunciato di segnatura σ è vero in una struttura $\langle M; \sigma \rangle$ dobbiamo espandere la segnatura aggiungendo a σ nomi (costanti individuali) $\bar{m}$ per ogni elemento $m \in M$. $\sigma \cup M$ denota la segnatura così espansa.

Definiamo ora per induzione quando un *enunciato di segnatura* $\sigma \cup M$ è *vero in* $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \cup M\rangle$, $\mathfrak{M} \models A$.

(a) $\mathfrak{M} \models P^n(t_1, \ldots, t_n)$ sse i valori $m_1, \ldots, m_n$ in $\mathfrak{M}$ dei termini chiusi $t_1, \ldots, t_n$ stanno nella relazione $\hat{P^n}$;

(b) $\mathfrak{M} \models (A \wedge B)$ sse $\mathfrak{M} \models A$ e $\mathfrak{M} \models B$;

(c) $\mathfrak{M} \models (A \vee B)$ sse $\mathfrak{M} \models A$ o $\mathfrak{M} \models B$;

(d) $\mathfrak{M} \models (A \to B)$ sse $\mathfrak{M} \not\models A$ o $\mathfrak{M} \models B$;

(e) $\mathfrak{M} \models \neg A$ sse $\mathfrak{M} \not\models A$;

(f) $\mathfrak{M} \models \forall x A$ sse $\mathfrak{M} \models A(\bar{m})$, per ogni $m \in M$;

(g) $\mathfrak{M} \models \exists x A$ sse $\mathfrak{M} \models A(\bar{m})$, per qualche $m \in M$.

Una formula $A(x_1, \ldots, x_k)$ con variabili libere $x_1, \ldots, x_k$ è detta *vera in* $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$ *per i valori* $m_1, \ldots, m_k \in M$ se l'enunciato $A(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_k)$ è vero in $\mathfrak{M}$. Altrimenti A è detta *falsa in* $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$ *per i valori* $m_1, \ldots, m_k \in M$.

Una formula $A(x_1, \ldots, x_k)$ con variabili libere $x_1, \ldots, x_k$ è detta *vera in* $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$ se l'enunciato $\forall x_1, \ldots, \forall x_k A(x_1, \ldots, x_k)$ è vero in $\mathfrak{M}$.

Facciamo infine un'osservazione tecnica che useremo nel seguito. Data una struttura $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \cup M\rangle$ e data una formula $A(x)$ (in cui la sola variabile x occorre libera), si prova facilmente per induzione (ma si deve fare un'induzione preventiva per stabilire un'analoga proprietà dei termini) che se t e u sono termini chiusi di segnatura $\sigma \cup M$ tali che $\hat{t} = \hat{u}$ in $\mathfrak{M}$ allora

$$(+) \qquad \mathfrak{M} \models A(t/x) \quad \text{sse} \quad \mathfrak{M} \models A(u/x).$$

Ne segue che le clausole per i quantificatori nella definizione di verità si possono equivalentemente dare nella seguente forma (detta *sostituzionale*):

$$\mathfrak{M} \models \exists x A \quad \text{sse} \quad \mathfrak{M} \models A(t/x) \quad \text{per qualche } t \text{ termine chiuso di } \sigma \cup M$$

$$\mathfrak{M} \models \forall x A \quad \text{sse} \quad \mathfrak{M} \models A(t/x) \quad \text{per ogni } t \text{ termine chiuso di } \sigma \cup M$$

(infatti, se $\hat{t} = m$, $\mathfrak{M} \models A(t/x)$ equivale a $\mathfrak{M} \models A(\bar{m}/x)$, per (+)).

3 Calcolo di sequenti

Sequenti sono parole del tipo

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

ove Γ e Δ sono successioni finite (eventualmente vuote) di formule.

Un sequente ammette due diverse interpretazioni, una 'deduttiva' (sintattica) ed una 'refutativa' (semantica). Secondo l'interpretazione deduttiva

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m,\ n, m > 0$ significa che la congiunzione $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ implica la disgiunzione $B_1 \vee \cdots \vee B_m$.

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ significa che la disgiunzione $B_1 \vee \cdots \vee B_m$ è dimostrabile

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ significa che la congiunzione $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ è inconsistente.[1]

Secondo l'interpretazione refutativa $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m,\ n, m > 0$, significa che in qualche struttura le formule $A_1, \ldots, A_n$ sono tutte vere e le formule $B_1, \ldots, B_m$ sono tutte false e quindi che $B_1 \vee \cdots \vee B_m$ non è conseguenza logica di $A_1, \ldots, A_n$. Analogamente $\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ significa che la formula $B_1 \vee \cdots \vee B_m$ non è valida, mentre $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ significa che la formula $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ è vera in qualche struttura e quindi che l'insieme $\{A_1, \ldots, A_n\}$ è consistente.

E' stata una feconda scoperta di G.Gentzen (1935) individuare regole per trasformare sequenti in sequenti suscettibili anch'esse delle due interpretazioni prima viste: deduttiva e refutativa, corrispondenti rispettivamente, alla lettura delle regole "dall'alto verso il basso" e "dal basso verso l'alto".

Supponiamo di voler sapere se la formula

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

è refutabile, ovvero se esiste una struttura in cui sia falsa.

Come primo passo si suppone che tale struttura esista, e scriviamo

$$\Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

Dalla tavola di verità dell'implicazione abbiamo che se $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ è falsa allora A è vera e $B \rightarrow A$ è falsa. Scriviamo quindi

$$A \Rightarrow B \rightarrow A.$$

[1] E' utile considerare una congiunzione vuota come una tautologia, una disgiunzione vuota come una contraddizione. Così ad esempio, '$A, B \Rightarrow$' significa che '$A \wedge B$ implica una contraddizione'. Il sequente vuoto '$\Rightarrow$' significa che 'una tautologia implica una contraddizione', il che equivale ad una contraddizione *tout court*.

Sempre utilizzando la tavola di verità dell'implicazione otteniamo che se $B \to A$ è falsa allora B è vera e A è falsa. Dunque

$$A, B \Rightarrow A.$$

Possiamo riassumere quanto detto nel seguente albero:

$$\dfrac{\dfrac{A, B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \to A}}{\Rightarrow A \to (B \to A)}$$

Abbiamo quindi ottenuto un albero avente come "radice" $\Rightarrow A \to (B \to A)$, come "foglia" $A, B \Rightarrow A$ e la cui costruzione è avvenuta procedendo dal basso verso l'alto. Nella interpretazione refutativa $A, B \Rightarrow A$ significa che A, B sono vere e A è falsa. Siamo quindi giunti a una contraddizione. Supporre che si possa refutare (che possa essere falsa) $A \to (B \to A)$ conduce a una contraddizione. E ciò ci consente di trarre l'importante conseguenza che $A \to (B \to A)$ è una tautologia, in quanto non refutabile.

Ma l'albero appena introdotto ammette anche di una interpretazione deduttiva o dall'alto verso il basso. Sicuramente A è deducibile da A e B e questo giustifica la foglia dell'albero. E' pure ragionevole assumere una regola di "scarico di assunzione", per cui se A è deducibile da A e B, allora $B \to A$ è deducibile dalla sola formula A e così otteniamo il sequente $A \Rightarrow B \to A$. Ripetendo una seconda volta lo stessa regola otteniamo il sequente $\Rightarrow A \to (B \to A)$, ovvero che $A \to (B \to A)$ è deducibile dall'insieme vuoto di assunzioni.

La morale del nostro esempio è che l'albero costruito dal basso verso l'alto con intento refutativo, e seguendo un ragionamento di tipo semantico, costituisce esso stesso, una volta letto dall'alto verso il basso, una dimostrazione. Questa sovrapposizione delle due letture - deduttiva/refutativa - è alla base del successo dei calcoli di sequenti.

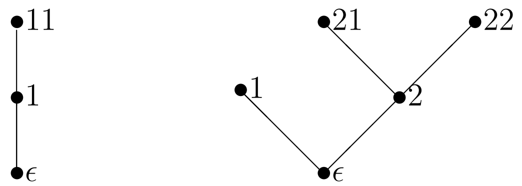
Iniziamo con l'introdurre la nozione di albero. Con N indichiamo l'insieme dei numeri naturali (zero escluso) e con N^* l'insieme delle liste finite di numeri naturali (inclusa la lista vuota che chiamiamo ϵ).

Un **albero** T è un sottoinsieme non vuoto di N^* (cioè un insieme di liste di numeri naturali) con le seguenti proprietà:

i) se $\alpha \in T$ e $\alpha = \beta\gamma$, allora $\beta \in T$;

ii) se $\alpha\, i \in T$ e $j < i$, allora $\alpha\, j \in T$.

Per esempio, i due alberi della figura sottostante corrispondono rispettivamente agli insiemi di liste $\{\epsilon, 1, 11\}$ e $\{\epsilon, 1, 2, 21, 22\}$. Il nodo 21 dell'albero (b) viene così indicato perchè il percorso per raggiungerlo dalla radice consiste nel prendere il secondo nodo della biforcazione e poi il primo nodo della biforcazione successiva. Lette in questo modo, le condizioni i) e ii) della definizione di albero risultano trasparenti: la condizione i) dice che se l'albero contiene il percorso che arriva al nodo α deve contenere ogni segmento iniziale di tale percorso, mentre la condizione ii) dice ad esempio che, se la biforcazione al nodo α contiene il terzo successore $\alpha\, 3$, allora deve contenere anche il primo ed il secondo dei successori, cioè $\alpha\, 1$ e $\alpha\, 2$.



(a) (b)

Per ogni nodo α, i nodi del tipo $\alpha\, i$ sono detti *successori immediati* (o *figli*) di α. Un nodo senza successori immediati è detto *foglia*. T è a *ramificazione finita* (o *finitario*) sse ogni nodo di T ha un numero finito di successori immediati (in queste note, per albero intenderemo sempre un albero a ramificazione finita). Un *ramo* di T è una successione finita o infinita di nodi $\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, \ldots$ tali che

$\alpha_0 = \epsilon$,

per ogni $i \geq 1$, α_i è successore immediato di α_{i-1},

se il ramo non è infinito, l'ultimo elemento è una foglia.

Per ogni nodo α, *il ramo sotto* α è costituito dai nodi $\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ tali che

$\alpha_0 = \epsilon$

$\alpha_n = \alpha$

per ogni $i, 1 \leq i \leq n$, α_i è successore immediato di α_{i-1}.

Entrambi gli alberi (a) e (b) della figura sopra sono a ramificazione finita. Nell'albero descritto in (a) esiste un'unica foglia, il nodo 11. Nell'albero in (b) le foglie sono i nodi 1 e 21, 22. Un esempio di ramo nell'albero in (b) è la seguente successione: ϵ, 2, 21. In (b) la radice ϵ ha due successori immediati, i nodi 1 e 2, in (a) la radice ϵ ha un solo successore immediato, il nodo 1.

Definizione 3.1 *Un* albero di sequenti *è una coppia* (T, δ)*, ove* T *è un albero e* δ *è una funzione che associa ad ogni nodo* α *di* T *un sequente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$*.*

Torniamo ora al nostro intento di definire un calcolo di sequenti. Una semplificazione (per altro inessenziale) ci tornerà utile. Considereremo un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ come costituito da due *multinsiemi* Γ e Δ di formule, ossia insiemi (eventualmente vuoti) di formule con possibili ripetizioni. Ad esempio, Δ potrà indicare $\{A, B, C\}$, oppure $\{A, B, B\}$, ecc. e non si distingue tra $\{A, B, B\}$ e $\{B, A, B\}$.

Formalmente, chiamiamo *regola di inferenza ad n premesse* $(n \geq 0)$[2] una $n + 1$-pla di sequenti che scriviamo nella forma

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Un *calcolo* $\mathcal{K}$ è un insieme di regole di inferenza; usualmente $\mathcal{K}$ è infinito, poichè le regole sono normalmente *schemi* di regole.

Per costruire dimostrazioni, avremo a disposizione assiomi e regole di inferenza del tipo

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}$$

Questa regola ci dice che se abbiamo appurato che da Γ segue la disgiunzione fra A e le formule di Δ, che da Γ segue la disgiunzione fra B e le formule di Δ, allora possiamo concludere che da Γ segue la disgiunzione fra $(A \wedge B)$ e le formule di Δ.

Notiamo subito che questa regola (come tutte le altre che introdurremo) ammette una lettura refutativa: se abbiamo appurato che 'tutte le formule in Γ sono vere, che $(A \wedge B)$ è falsa e tutte le formule in Δ sono false', allora possiamo concludere che 'tutte le formule di Γ sono vere, A è falsa e tutte

[2] Le regole di inferenza a zero premesse sono gli assiomi.

le formule in Δ sono false' *oppure* che 'tutte le formule di Γ sono vere, B è falsa e tutte le formule in Δ sono false'.

Avremo due regole di inferenza per ogni connettivo, una che consente di introdurlo sulla destra ed una sulla sinistra di $\Rightarrow$. Chiamiamo *regole operazionali* queste regole.

Definizione 3.2 *Una* $\mathcal{K}$-dimostrazione *è un albero di sequenti* (T, δ) *che soddisfa la seguente condizione: per ogni* $\alpha \in T$, *se* $\alpha\,1, \ldots, \alpha\,n$ *sono tutti e soli i successori immediati di* α, *allora*

$$\frac{\delta(\alpha\,1) \cdots \delta(\alpha\,n)}{\delta(\alpha)}$$

è una regola di $\mathcal{K}$.

Un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è *dimostrabile* in $\mathcal{K}$ (o, semplicemente, *dimostrabile*) e scriviamo in tal caso $\mathcal{K} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (o semplicemente $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$) qualora esista una dimostrazione (T, δ) tale che δ applicata alla radice di T sia proprio $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Una formula A si dice dimostrabile in $\mathcal{K}$ qualora lo sia il sequente $\Rightarrow A$ (scriviamo $\mathcal{K} \vdash A$ o semplicemente $\vdash A$ in tal caso).

Intuitivamente, quindi, una dimostrazione del sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è un albero avente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ come radice, avente assiomi come foglie e tale che siano state applicate le regole di $\mathcal{K}$ per passare da un nodo ai successivi.

Non ci resta ora che specificare le regole del nostro calcolo.[3]

Ci limitiamo a linguaggi senza identità e alla logica pura. Prima di tutto espandiamo la segnatura σ di $\mathcal{L}$ aggiungendo un'infinità numerabile $\mathcal{C}$ di nuove costanti (che chiameremo **parametri**) $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Indichiamo con $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ il linguaggio così ottenuto. Inoltre ci limiteremo a dimostrazioni costituite da sequenti chiusi, ciò non costituisce una vera limitazione: in effetti verificare la validità logica di una formula A equivale a verificare la validità

[3] Il calcolo che presentiamo qui è una variante del calcolo dei sequenti LK per la logica classica introdotto da Gentzen nel 1935. La variante che proponiamo (dovuta al logico finlandese Ketonen) si caratterizza per il fatto di avere tutte le regole invertibili ed è strettamente imparentata con i tableaux semantici del logico olandese E.Beth, ripresi in vario modo in tempi più recenti da Smullyan, Fitting, ecc.

logica dell'enunciato ottenuto da A rimpiazzando variabili libere distinte con parametri distinti.[4]

Assiomi

$$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$$

Regole di inferenza operazionali

[4]Se si vuole operare con sequenti che contengono variabili libere (cosa che non faremo per semplicità), occorre tenere presente alcuni problemi relativi alla sostituzione. Li riassumiamo brevemente perchè essi sono menzionati su tutti i testi di logica. Il nostro formalismo deve consentirci di dimostrare sequenti del tipo $\forall x A \Rightarrow A(t/x)$, tuttavia non tutti i sequenti di tale tipo sono logicamente validi. Ad esempio $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y P(y,y)$ non vale in tutte le strutture (questa formula direbbe ad esempio che 'se ogni uomo ha un padre, allora c'è qualcuno che è padre di se stesso'). Questa anomalia è dovuta al fatto che la sostituzione di y ad x in $\exists y P(x,y)$ non è da ritenersi corretta: in casi come questi il termine sostituendo contiene una variabile che, a sostituzione avvenuta, risulta vincolata. Diciamo, in generale, che il termine $t(y_1, \ldots, y_n)$ è sostituibile ad x in A qualora per nessuna delle y_i ci sia una sottoformula di A del tipo $\exists y_i B$ (oppure del tipo $\forall y_i B$) contenente un'occorrenza di x che è libera in A. Per manipolare sequenti con variabili libere, occorre specificare che nelle regole $(S\forall)$ e $(D\exists)$ sottoindicate, le sostituzioni coinvolte devono essere corrette (o, meglio, che in caso di sostituzioni scorrette, si deve passare ad una variante alfabetica, cioè ad una rinomina delle variabili vincolate). Si noti che, operando soltanto con termini chiusi, il problema non si pone: se t è chiuso, t è sempre sostituibile ad ogni x in ogni A.

$$D \wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$S \wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$S \vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$D \vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$D\neg \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

$$S\neg \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$D \rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$S \rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Le regole per i quantificatori, tenendo conto del fatto che operiamo solo con sequenti chiusi, vengono cosí espresse

$$S\forall \; \frac{A(t/x), \forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$D\exists \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A, A(t/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$$

$$D\forall \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(c/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$S\exists \; \frac{A(c/x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

dove t è un termine chiuso di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$, e c è un parametro che non compare in A, Γ, Δ.

Si noti con cura l'asimmetria fra le due ultime regole per i quantificatori e le prime due: nelle ultime due regole il parametro c deve essere **nuovo**, cioè non ancora utilizzato. Nelle prime due regole, invece, il termine t di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ può (e deve, per ragioni di efficienza) essere scelto fra i termini **vecchi** già utilizzati nella dimostrazione (solo nel caso che non sia stato ancora utilizzato alcun termine, si fa figurare che sia stata utilizzato un parametro a scelta, ad esempio c_0). Inoltre le prime due regole prevedono, a differenza delle seconde due, la **ricopiatura** (in una lettura della regola dal basso verso l'alto) della formula quantificata che viene analizzata.

L'interpretazione refutativa delle prime due regole predicative è la seguente: se $\forall x A$ è vera (rispettivamente, se $\exists x A$ è falsa) allora è vera (risp. falsa) $A(t/x)$. In questa situazione non possiamo però cancellare l'informazione che $\forall x A$ è vera (risp. che $\exists x A$ è falsa), perchè potremmo averne bisogno in seguito per degli altri termini t (per esempio per dei parametri nuovi introdotti a seguito delle ultime due regole, parametri che ancora non siamo in grado di prevedere).

L'interpretazione refutativa delle ultime due regole è invece la seguente:

se $\exists xA$ è vera (risp. se $\forall xA$ è falsa), allora sappiamo che c'è un 'oggetto' per il quale $A(x)$ è vera (risp. tale che $A(x)$ è falsa); diamo il nome c a tale oggetto, facendo attenzione a non assumere che tale c (che sappiamo esistere) coincida con individui a noi già noti (potrebbe coincidere, ma non ci possiamo sbilanciare in proposito): per questo occorre che il parametro c rappresenti un nome nuovo.

3.1 Validità

Vogliamo subito assicurarci che le regole appena introdotte sono 'buone', ovvero ci consentono di dimostrare **solo** sequenti $\Gamma \Rightarrow \Delta$ validi, tali che la formula $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ sia una verità logica.

Teorema (di validità) Se un sequente chiuso $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ di segnatura $\sigma \cup \mathcal{C}$ è dimostrabile, allora $\Gamma_0 \models \bigvee \Delta_0$, ovvero non esiste alcuna struttura $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \cup \mathcal{C} \rangle$ per cui si abbia contemporaneamente $\mathfrak{M} \models A$ per ogni $A \in \Gamma_0$ e $\mathfrak{M} \not\models B$ per ogni $B \in \Delta_0$. In particolare, se B è dimostrabile, B è una verità logica.

Dim. Se $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è dimostrabile allora esiste un albero di dimostrazione di $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$. Procediamo per induzione sul numero k dei nodi della dimostrazione. Il ragionamento che facciamo è in sostanza il seguente: prima verifichiamo che un albero di dimostrazione ridotto alla sola radice verifica l'asserto del teorema. Poi consideriamo il caso in cui $k > 1$: qui la radice dell'albero avrà uno o due successori immediati. Siccome gli alberi che stanno sopra tali successori immediati hanno certamente meno nodi di k, possiamo supporre di avere già verificato l'asserto del teorema per essi. Vediamo ora come sviluppare in modo preciso il nostro ragionamento induttivo sul numero dei nodi.

Se $k = 1$, allora $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è del tipo $\Gamma, C \Rightarrow C, \Delta$ ed è ovvio che non esiste alcuna struttura $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models A$ per ogni $A \in \Gamma_0$ e tale che $\mathfrak{M} \models B$ per ogni $B \in \Delta_0$ (la formula C sarebbe in tal caso sia vera che falsa).

Se $k > 1$, focalizziamo l'attenzione sull'ultima regola utilizzata: consideriamo il caso delle regole per $\wedge, \neg$ e $\exists$ e lasciamo gli altri al lettore.

Consideriamo la regola $(D\wedge)$. In tal caso $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è del tipo $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B$ e possiamo applicare l'ipotesi induttiva ai sequenti $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ e $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ (essi infatti sono dimostrabili con alberi di dimostrazione più piccoli, trattandosi degli alberi ottenuti dall'albero della dimostrazione di $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ privato della radice). Supponiamo che $\mathfrak{M}$ sia un modello che rende vere tutte le formule di Γ e false tutte le formule di $\Delta, A \wedge B$. Allora $\mathfrak{M} \not\models A$ oppure $\mathfrak{M} \not\models B$. In ogni caso otteniamo una contraddizione perchè per ipotesi induttiva, non esiste una struttura $\mathfrak{M}$ che rende vere tutte le formule di Γ e false tutte le formule di Δ, A e non esiste una struttura $\mathfrak{M}$ che rende vere tutte le formule di Γ e false tutte le formule di Δ, B.

Consideriamo ora la regola $(S\wedge)$. $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ sarà del tipo $A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ e, come nel caso precedente, possiamo applicare l'ipotesi induttiva a $A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Sia $\mathfrak{M}$ un modello che rende vere $A \wedge B$ e tutte le formule in Γ e che rende false tutte le formule in Δ. Per la tavola di verità della congiunzione, $\mathfrak{M}$ rende vere sia A che B, dunque $\mathfrak{M}$ rende vere tutte le formule in A, B, Γ e false tutte le formule in Δ, contro l'ipotesi induttiva.

Consideriamo ora la regola $(D\neg)$. Avremo che $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è del tipo $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A$ e l'ipotesi induttiva ci dice che per il sequente $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ vale l'asserto del teorema. Se $\mathfrak{M}$ è un modello che rende vere tutte le formule in Γ e false tutte le formule in $\Delta, \neg A$, allora per la tavola di verità della negazione, $\mathfrak{M}$ rende vere tutte le formule in A, Γ e false tutte le formule in Δ, contro l'ipotesi induttiva.

Consideriamo ora la regola $(S\neg)$. Avremo che $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è del tipo $\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ e l'ipotesi induttiva ci dice che per il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ vale l'asserto del teorema. Se $\mathfrak{M}$ è un modello che rende vere tutte le formule in $\neg A, \Gamma$ e false tutte le formule in Δ, allora per la tavola di verità della negazione, $\mathfrak{M}$ rende vere tutte le formule in Γ e false tutte le formule in Δ, A, contro l'ipotesi induttiva.

Consideriamo il caso in cui l'ultima regola utilizzata sia $(D\exists)$. Allora $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è del tipo $\Gamma_0 \Rightarrow \exists x A, \Delta$ e il penultimo nodo della dimostrazione è $\Gamma_0 \Rightarrow \exists x A, A(t/x), \Delta$.[5] Sia per assurdo $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma \cup \mathcal{C} \rangle$ una struttura in cui tutti gli enunciati in Γ_0 sono veri e tutti gli enunciati in $\exists x A, \Delta$ sono falsi. In particolare è falso $\exists x A$, ma allora per la interpretazione sostituzionale delle clausole di verità per i quantificatori è falso anche $A(t/x)$, contro l'ipotesi induttiva.

Consideriamo il caso in cui l'ultima regola applicata sia $(S\exists)$; allora $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è del tipo $\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta_0$ e il penultimo nodo della dimostrazione è $\Gamma, A(c/x) \Rightarrow \Delta_0$, dove c è un parametro che non occorre in Γ, A, Δ_0. Sia per

[5]Per ipotesi induttiva, avremo quindi che in nessuna struttura $\mathcal{M}$ tutte le formule in Γ_0 sono vere, tutte le formule in Δ sono false e sono false pure $\exists x A$ e $A(t/x)$.

assurdo $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \cup \mathcal{C} \rangle$ una struttura per cui tutti gli enunciati in $\Gamma, \exists x A$ sono veri e tutti gli enunciati in Δ_0 sono falsi. In particolare, esiste un $m \in M$, tale che $\mathfrak{M} \models A(\bar{m}/x)$. Possiamo modificare la struttura $\mathfrak{M}$ in una struttura $\mathfrak{M}'$ che è esattamente come $\mathfrak{M}$, solo che il parametro c è ora interpretato su m. Siccome gli enunciati di Γ, Δ_0 non contengono il parametro c, essi saranno ancora, rispettivamente, tutti veri e tutti falsi in $\mathfrak{M}'$. Quanto ad $A(c/x)$, essa avrà in $\mathfrak{M}'$ lo stesso valore di verità di $A(\bar{m}/x)$, poiché $\bar{m}$ e c sono entrambi interpretati su m, (vedi la condizione (+)). Ma l'enunciato $A(\bar{m}/x)$ è vero sia in $\mathfrak{M}$ che in $\mathfrak{M}'$ perchè $A(x)$ non contiene il parametro c. Quindi l'enunciato $A(c/x)$ è vero in $\mathfrak{M}'$. Abbiamo così stabilito che gli enunciati di $\Gamma, A(c/x)$ sono tutti veri in $\mathfrak{M}'$, mentre gli enunciati Δ_0 sono tutti falsi in $\mathfrak{M}'$, contro l'ipotesi induttiva. QED

4 Ricerca di dimostrazioni/ Ricerca di contromodelli

Per quanto riguarda la ricerca di dimostrazioni (o di contromodelli) il caso proposizionale si differenzia nettamente e profondamente da quello predicativo.

4.0.1 Caso proposizionale

Iniziamo con un paio di esempi.

ESEMPIO Supponiamo di voler provare che il sequente

$$p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$$

è dimostrabile.

Dobbiamo quindi costruire un albero che abbia $p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$ come radice. Una strategia utile e, nel caso proposizionale, **vincente**, è quella di ragionare secondo l'interpretazione refutativa: consideriamo vere le formule $p \to q, \neg q$ e falsa la formula $\neg p$. Applichiamo la regola per la negazione a destra (l'interpretazione refutativa di questa regola è che se $\neg p$ è falsa allora p è vera) e otteniamo[6]

[6]Si osservi che, siccome i sequenti sono per definizione coppie di multinsiemi, è irrilevante l'ordine in cui disponiamo le fomule nell'antecedente o nel conseguente di un sequente. È ovviamente invece rilevante il fatto che un'occorrenza di una formula preceda oppure segua il simbolo $\Rightarrow$ all'interno di un sequente.

$$\frac{p \to q, p, \neg q \Rightarrow}{p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p}$$

Applichiamo poi la regola per la negazione a sinistra (l'interpretazione refutativa di questa regola è che se $\neg q$ è vera allora q è falsa) e otteniamo

$$\frac{\dfrac{p \to q, p \Rightarrow q}{p \to q, p, \neg q \Rightarrow}}{p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p}$$

Infine applichiamo la regola per l'implicazione a sinistra (l'interpretazione di questa regola è che se una implicazione è vera allora o l'antecedente è falso oppure il conseguente è vero) e otteniamo

$$\frac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p, q \qquad q, p \Rightarrow q}{p \to q, p \Rightarrow q}}{p \to q, p, \neg q \Rightarrow}}{p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p}$$

Osserviamo che abbiamo in questo modo ottenuto un albero avente $p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$ in radice ed avente i sequenti $q, p \Rightarrow q$ e $p \Rightarrow p, q$ come foglie. Siccome questi sequenti sono, per definizione, assiomi, si ha che l'albero costituisce una dimostrazione. Dunque $p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$ è un sequente dimostrabile. Intuitivamente, nella interpretazione refutativa, il fatto che partendo dal sequente in radice si sia arrivati, applicando le regole, a foglie che sono tutte costituite da assiomi ha il seguente significato: partendo dall'ipotesi che le formule $p \to q, \neg q$ siano vere e che sia falsa la formula $\neg p$ si ottiene, mediante l'applicazione delle regole, che (1) q e p sono entrambe vere e q è falsa, oppure (2) p è vera e p e q sono entrambe false. Siccome sia il caso (1) che il caso (2) descrivono situazioni contraddittorie, si ha che il supporre $p \to q, \neg q$ vere e $\neg p$ falsa porta in ogni caso ad un assurdo.

ESEMPIO Consideriamo il sequente

$$p \to q, \neg p \Rightarrow \neg q$$

Vogliamo vedere se è dimostrabile. Ragionando come nell'esempio precedente otteniamo l'albero

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{q \Rightarrow p, p \qquad q, q \Rightarrow p}{p \to q, q \Rightarrow p}}{p \to q, q, \neg p \Rightarrow}}{p \to q, \neg p \Rightarrow \neg q}$$

Abbiamo quindi ottenuto un albero avente $p \to q, \neg p \Rightarrow \neg q$ come radice ed avente i sequenti $q, q \Rightarrow p$ e $q \Rightarrow p, p$ come foglie. Osserviamo che se avessimo applicato le regole per la negazione e per la implicazione in un ordine differente avremmo ottenuto gli stessi sequenti come foglie e che nessuna altra regola è applicabile. I sequenti $q, q \Rightarrow p$ e $q \Rightarrow p, p$ non sono assiomi, dunque nessun albero avente $p \to q, \neg p \Rightarrow \neg q$ come radice avrà assiomi come foglie (cioè con la prima interpretazione: il supporre che $p \to q, \neg p$ siano entrambe vere e $\neg q$ sia falsa non porta a nessuna contraddizione). Dunque $p \to q, \neg p \Rightarrow \neg q$ non è un sequente dimostrabile. Osserviamo che l'albero che abbiamo ottenuto ci permette anche di trovare un assegnamento in cui $p \to q, \neg p$ sono vere e $\neg q$ è falsa: le informazioni per costruire un tale assegnamento sono fornite da una qualsiasi delle foglie non etichettate da un assioma. Nel nostro caso, considerando ad esempio la foglia $q, q \Rightarrow p$, avremo che un qualsiasi assegnamento in cui q è vera e p è falsa è un assegnamento per cui $p \to q, \neg p$ sono vere e $\neg q$ è falsa.

Si osservi che, mettendo un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in radice e applicando le regole operazionali in un ordine qualsiasi si deve arrivare ad un albero sulle cui foglie nessuna regola è più applicabile (le regole operazionali smontano via via tutti i connettivi presenti nel sequente finchè non ne rimane più nessuno): a quel punto, o si è trovata una prova che il sequente è tautologico (questo è il caso in cui su tutte le foglie c'è un assioma), oppure (come spiegato sopra) si hanno le informazioni sufficienti per trovare un assegnamento falsificante.

Le osservazioni che abbiamo appena fatto contengono tutti gli ingredienti per il teorema di completezza proposizionale.

Teorema di completezza (caso proposizionale)[7] Se $\nvdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, allora esiste una funzione di valutazione V tale che $V(A) = 1$ per ogni $A \in \Gamma_0$ e tale che $V(B) = 0$ per ogni $B \in \Delta_0$. Di conseguenza, per ogni formula B, se $\nvdash B$, allora B non è una tautologia.

Osservazione. L'enunciato del teorema è di tipo esistenziale " ... allora esiste una valutazione V tale che ... ", e come vedremo dalla dimostrazione,

[7] Una struttura per un linguaggio enunciativo si riduce ad una funzione di valutazione V che assegna ad ogni variabile enunciativa 0 oppure 1. Poniamo inoltre che $V \models p$ sse $V(p) = 1$.

si tratta di una asserzione di esistenza di tipo costruttivo. Infatti è facilmente approntabile una procedura ricorsiva che consente di determinare in un numero finito di passi la valutazione V di cui si asserisce l'esistenza. In generale, dato un sequente le regole ci consentono di 'smontarlo' in sequenti contenenti via via un minor numero di connettivi, fino a smontarlo in sequenti contenenti zero connettivi. A questo punto la procedura si arresta e due sono i casi: o l'albero così ottenuto è una dimostrazione (ad ogni foglia è associato un assioma) o contiene almeno un ramo 'aperto' (alla cui foglia non è associato un assioma) che ci dà informazioni su come definire la valutazione V.

Dim. Supponiamo che il sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ non sia dimostrabile (ossia che esso non compaia mai alla radice di un albero che sia una dimostrazione). Dobbiamo trovare una valutazione V che renda vere tutte la Γ_0 e false tutte le Δ_0. Ragioniamo per induzione sul numero dei connettivi di $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, ossia su $k = \sum_{A \in \Gamma} c(A) + \sum_{B \in \Delta} c(B)$ (dove $c(A), c(B)$ indicano il numero dei connettivi di A e di B, rispettivamente). Anche qui lo schema del ragionamento è il seguente: troviamo una valutazione opportuna nel caso $k = 0$ (ossia nel caso in cui $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ abbia solo formule atomiche) e nel caso $k > 0$ lo costruiamo supponendo di saperlo già trovare per tutti i sequenti non dimostrabili il cui numero di connettivi sia minore di k.

Se $k = 0$, allora $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ è del tipo $p_1, \ldots, p_n \Rightarrow q_1, \ldots, q_m$ (ossia consiste solo di formule atomiche). Nessuno dei p_i può essere uguale ad un q_j perché il sequente non è dimostrabile (quindi, in particolare, non è un assioma). Definiamo una valutazione V come richiesto nell'asserto del teorema ponendo $V(p_i) = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $V(q_j) = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, m$ (V è arbitrario sulle restanti lettere proposizionali di $\mathcal{L}$).

Se $k > 0$, allora ci sono formule non atomiche in $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$. Sono possibili vari casi (non disgiunti fra loro), ne analizzeremo quattro lasciando i rimanenti al lettore.

- Δ_0 contiene una formula del tipo $A \wedge B$, possiamo supporre $\Delta_0 = \Delta, A \wedge B$. Osserviamo che uno dei sequenti $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta, A$ e $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta, B$ non è dimostrabile, infatti se avessimo $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta, A$ e $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta, B$ si avrebbe che $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, contro l'ipotesi (basterebbe infatti aggiungere, con una applicazione della regola $(D\wedge)$, un nodo-radice etichettato $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ sotto ai due alberi di dimostrazione di $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta, A$ e di $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta, B$).

  Supponiamo che sia il primo dei due a non essere dimostrabile; siccome il numero dei connettivi è diminuito, per ipotesi induttiva esiste V tale che V rende vere tutte le Γ_0 e false tutte le Δ, A. A maggior ragione, V rende falsa $A \wedge B$ (infatti, se A è falsa, tale è $A \wedge B$). Allora V rende vere tutte le Γ_0 e false tutte le $\Delta, A \wedge B$, come richiesto.

- Sia $\Gamma_0 = A \wedge B, \Gamma$. Dunque $\not\vdash A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta_0$, infatti se fosse $\vdash A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta_0$ si avrebbe, per la regola $(S\wedge)$, $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, contro l'ipotesi. Per ipotesi induttiva esiste quindi V tale che che V rende vere tutte le A, B, Γ e false tutte le Δ_0. Per tale V, avremo anche che $V(A \wedge B) = 1$ (se A e B sono entrambe vere, tale è $A \wedge B$), come richiesto.

- Sia $\Gamma_0 = \neg A, \Gamma$. Dunque $\not\vdash \Gamma \Rightarrow A, \Delta_0$, infatti se fosse $\vdash \Gamma \Rightarrow A, \Delta_0$ si avrebbe, per la regola $(D\neg)$, $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, contro l'ipotesi. Per ipotesi induttiva esiste quindi V tale che V rende vere tutte le Γ e false tutte le A, Δ_0. Per tale V, avremo anche che $V(\neg A) = 1$ (se A è falsa, $\neg A$ è vera), come richiesto.

- Sia $\Delta_0 = \neg A, \Delta$. Dunque $\not\vdash A, \Gamma_0 \Rightarrow \Delta$, infatti se fosse $\vdash A, \Gamma_0 \Rightarrow \Delta$ si avrebbe, per la regola $(D\neg)$, $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, contro l'ipotesi. Per ipotesi induttiva esiste quindi V tale che V rende vere tutte le A, Γ_0 e false tutte le Δ. Per tale V, avremo anche che $V(\neg A) = 0$ (se A è vera, $\neg A$ è falsa), come richiesto.

- Analogamente per i connettivi $\vee$ e $\rightarrow$.

4.0.2 Caso predicativo

Per la logica predicativa il tipo di argomento sviluppato nel precedente teorema di completezza non è proponibile poichè le regole relative ai quantificatori non fanno diminuire, in genere, il numero dei simboli logici (connettivi e quantificatori), anzi in alcuni casi lo fanno aumentare. Si potrebbe però pensare di scegliere regole 'migliori' e quindi di ottenere anche per il caso predicativo un teorema di completezza di tipo 'costruttivo'. Le cose non stanno così. Un risultato classico (*il teorema di Church*[8]) ci dice che la nozione

[8] Il teorema di Church [1936] dice che 'l'insieme delle formule valide è *ricorsivamente indecidibile*'. "If we accept Church's thesis, then recursive undecidability is equivalent to effective undecidability, i.e., non-existence of a mechanical decision procedure for theoremhood. The non-existence of such a mechanical procedure means that ingenuity is required for determining whether any given wf is a theorem." [da E.Mendelson, p.151]. La tesi di Church asserisce che: 'una funzione numerica è effettivamente computabile sse è ricorsiva'.

di verità logica è indecidibile, cioè non è possibile progettare un algoritmo che, presa in ingresso una formula A, termini sempre dicendo in uscita se A è una verità logica o meno. Al meglio possiamo ottenere una procedura di semidecisione ed il calcolo proposto fa esattamente questo: data A in ingresso, se A è una verità logica, sarà sempre possibile appurarlo in modo meccanico (pur di avere risorse di calcolo illimitate in tempo ed in spazio); se non lo è, solo nei casi fortunati saremo in grado di appurarlo, nei casi sfortunati la procedura di ricerca di una dimostrazione sarà destinata a non avere mai fine. Quindi il calcolo, una volta implementato su un calcolatore, ci potrà porre nella situazione imbarazzante per cui, se dopo un tempo notevole di attesa non abbiamo ancora avuto la risposta, non potremo mai sapere se tale attesa è fatalmente destinata a durare per sempre o se, dando ancora un po' di tempo alla macchina, si avrebbe invece la risposta desiderata. Nonostante questi limiti di principio, va comunque osservato che il settore del ragionamento automatico ha fatto segnare in tempi recenti notevoli successi, tali da coprire un certo numero di casi di interesse sia teorico che pratico.

Per stabilire se un dato sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è dimostrabile, lo si scrive in basso nel foglio e lo si analizza a ritroso come previsto dalle regole.[9] La ricerca di dimostrazione si arresta con esito positivo quando si raggiunge un assioma su tutte le foglie dell'albero che si è prodotto.

ESEMPIO Per stabilire che l'inferenza

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
Quindi Socrate è mortale.

è corretta, basta trovare una dimostrazione del sequente

$$\forall x(U(x) \rightarrow M(x)), U(s) \Rightarrow M(s).$$

Ciò può essere fatto nel modo seguente

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(U(x) \rightarrow M(x)), U(s) \Rightarrow U(s), M(s) \qquad \forall x(U(x) \rightarrow M(x)), U(s), M(s) \Rightarrow M(s)}{\forall x(U(x) \rightarrow M(x)), U(s) \rightarrow M(s), U(s) \Rightarrow M(s)}}{\forall x(U(x) \rightarrow M(x)), U(s) \Rightarrow M(s)}$$

[9]Un piccolo ma utile accorgimento pratico: per non perdersi nella rilettura di quanto si è fatto, ci si può munire di un evidenziatore e segnare con esso il connettivo che viene via via analizzato.

dove abbiamo utilizzato, nell'ordine, le regole $(S\forall)$ e $(S \rightarrow)$.

<u>*ESEMPIO*</u> Vogliamo provare che il sequente

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

è dimostrabile. Scrivendo il sequente in radice e applicando le regole, si ottiene il seguente albero (indichiamo i parametri con le lettere $a, b, c, ...$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a), Q(a) \Rightarrow P(a)}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a) \wedge Q(a) \Rightarrow P(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow P(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a), Q(a) \Rightarrow Q(a)}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a) \wedge Q(a) \Rightarrow Q(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow Q(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x Q(x)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$$

Dunque il sequente $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ è dimostrabile.

Il seguente esempio dimostra che la ricopiatura delle formule universali sulla sinistra e di quelle esistenziali sulla destra è indispensabile:

<u>*ESEMPIO*</u> Vogliamo provare che la formula $\exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x))$ è dimostrabile. Procedendo nell'analisi otteniamo il seguente albero di dimostrazione:

$$\begin{array}{l}
P(a), \exists y P(y) \Rightarrow P(c), P(a), \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x)) \\
\hline
P(a) \Rightarrow P(c), \exists y P(y) \rightarrow P(a), \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x)) \\
\hline
P(a) \Rightarrow P(c), \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x)) \\
\hline
\exists y P(y) \Rightarrow P(c), \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x)) \\
\hline
\Rightarrow \exists y P(y) \rightarrow P(c), \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x)) \\
\hline
\Rightarrow \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x))
\end{array}$$

Nell'ordine (dal basso verso l'alto), abbiamo utilizzato: la regola $(D\exists)$ relativamente a c,[10] la regola proposizionale $(D \rightarrow)$, la regola $(S\exists)$ con l'introduzione del parametro nuovo a, la regola $(D\exists)$ (per la seconda volta!) relativamente al termine vecchio a e infine di nuovo la regola proposizionale $(D \rightarrow)$.

[10]Si osservi che il parametro nuovo c viene qui usato per la regola $(D\exists)$: ciò è dovuto al fatto che, come segnalato nel paragrafo precedente, nessun termine chiuso 'vecchio' era disponibile. Si tratta di un evento eccezionale (negli altri casi, l'uso di parametri nuovi per le regole $(D\exists)$ e $(S\forall)$ produce solo inutili giri viziosi).

La possibilità che la ricerca di una dimostrazione non abbia mai fine è frequente: se per esempio fra le formule 'segnate vere' (ossia a sinistra di $\Rightarrow$), compare una formula del tipo $\forall x \exists y R(x, y)$, allora l'applicazione combinata di $(S\forall)$ e $(S\exists)$ produce un regresso all'infinito. Iniziando da $(S\forall)$ e istanziando con un termine chiuso c_0 qualunque, si ha

$$\cdots \forall x \exists y R(x, y), \exists y R(c_0, y), \cdots \Rightarrow \cdots$$

e poi applicando $(S\exists)$ (qui c_1 è forzatamente un parametro nuovo) si ottiene

$$\cdots \forall x \exists y R(x, y), R(c_0, c_1) \cdots \Rightarrow \cdots$$

A questo punto, si può applicare $(S\forall)$ istanziando x su c_1

$$\cdots \forall x \exists y R(x, y), R(c_0, c_1), \exists y R(c_1, y) \cdots \Rightarrow \cdots$$

e poi di nuovo $(S\exists)$ producendo un parametro nuovo c_2

$$\cdots \forall x \exists y R(x, y), R(c_0, c_1), R(c_1, c_2) \cdots \Rightarrow \cdots$$

e così via all'infinito. Certamente qualche particolare tipo di inconveniente si potrebbe eliminare con una versione meno ingenua del calcolo, ma *non esiste nessuna versione del calcolo che assicuri sempre la terminazione*, a causa del risultato di indecidibilità cui si accennava.

La possibilità di regressi all'infinito pone un nuovo problema relativamente alla strategia di ricerca di una prova. Consideriamo il sequente

$$\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow A, \neg A$$

Se operiamo sempre sulla sinistra, otteniamo ovviamente il regresso all'infinito che abbiamo appena visto; se invece operiamo sulla destra (con la regola $(D\neg)$), chiudiamo subito. Quindi non è più vero, come nel caso proposizionale, che possiamo operare in un ordine qualunque, con l'idea che 'tanto poi il risultato è sempre lo stesso'. Nel caso predicativo, si può ancora operare in un ordine qualunque, ma bisogna rispettare il seguente criterio di **equità** ('fairness'): *nell'esplorare un ramo, nessuna regola applicabile deve essere dilazionata all'infinito*. Con questo solo accorgimento, come si vedrà meglio nella dimostrazione del teorema di completezza, se una dimostrazione esiste la si troverà sempre (magari più poi che prima se non si sono fatte le scelte migliori...). Il requisito di equità è sempre presente in una forma o nell'altra in tutti i tipi di calcoli che si utilizzano nell'ambito della dimostrazione automatica.[11]

Diamo qui di seguito una copiosa serie di esercizi. Lo studente potrà svolgere il quantitativo di esercizi che egli reputa sufficiente ad ottenere un buon grado di dimestichezza con il calcolo.

ESERCIZI (ricerca di dimostrazioni):

1 $\forall x(P(x) \to Q(x) \wedge S(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \to S(x))$.

2 $\forall x\forall y(R(x,y) \vee R(y,x)) \Rightarrow \forall x\exists y R(x,y)$.

3 $\exists y R(a,y), \forall x\forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to S(y)) \Rightarrow \exists x(P(x) \to S(x))$.

4 $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to P(a) \Rightarrow (\exists x P(x) \to P(a)) \wedge (\exists x Q(x) \to P(a))$.

5 $\forall y(R(a,y) \to Q(y)), \forall x\exists y R(x,y), \forall x\forall y(R(x,y) \wedge Q(x) \to \neg Q(y)) \Rightarrow \exists x \neg Q(x)$.

6 $\forall x(P(x) \to Q(a)), \forall x(R(x) \to Q(a)) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee R(x)) \to Q(a)$.

7 $Q(a), \forall x(Q(x) \wedge \neg P(f(x)) \to P(x)) \Rightarrow \exists x P(x)$.

8 $\neg\exists x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge \neg\exists x Q(x)$.

9 $\neg P(a) \to \exists y R(a,y), \forall x\forall y(R(x,y) \to P(x) \vee P(y) \vee \exists z P(z)) \Rightarrow \exists x P(x)$.

10 $\forall x(P(x) \to Q(f(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$.

11 $\exists x(\neg Q(a) \to R(x)), \forall x(R(x) \wedge \neg Q(a) \to Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \to Q(x))$.

12 $\forall x(P(x) \vee Q(a)) \Rightarrow \neg Q(a) \to P(b)$.

[11] Il lettore, dopo aver svolto un congruo numero di esercizi, si accorgerà che molto spesso, nel generare l'albero di prova, risulta inutile ricopiare sempre lungo un ramo una formula che si vede subito che non verrà più utilizzata. Ciò è ovviamente lecito (a patto di avere intuito correttamente che la formula in questione è inutile) nell'ambito del tipo di esercizi esaminato in questo paragrafo (non è così per gli esercizi che vedremo nel prossimo paragrafo dove nessuna formula può essere 'persa per strada'). In effetti, la versione del calcolo che abbiamo presentato fa un uso non ottimale della memoria: sarebbe forse meglio non ricopiare mai niente e ripescare 'dal basso' del ramo le formule da analizzare ('asteriscando' quelle già analizzate, come insegna il formalismo dei tableaux); tuttavia ci sembra che il calcolo che abbiamo introdotto si presti meglio all'utilizzo didattico in un corso di primo livello.

13 $\forall x(Q(x) \to \exists z P(z)) \Rightarrow \exists y(Q(y) \to P(y))$.

14 $\exists x(P(x) \wedge \forall y Q(y)) \Rightarrow \forall y \exists x(P(x) \wedge Q(y))$;

15 $\neg Q(a) \to (P(f(a)) \vee Q(g(a))) \Rightarrow \exists y(\forall x \neg P(x)$

16 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists y S(y) \Rightarrow \exists y \exists x((P(x) \to S(y)) \wedge (Q(x) \to S(y)))$.

17 $\Rightarrow \exists x(P(x) \to Q(x) \vee \forall z \neg Q(z))$.

18 $\exists x P(x) \to \forall y \exists x R(x, y) \Rightarrow \forall y \forall x \exists z(P(x) \to R(z, y))$.

19 $\forall y(\neg P(y) \to P(f(y))) \Rightarrow \exists x P(f(x))$.

20 $\exists x P(x) \to \forall y Q(y) \Rightarrow \forall y \forall x(\neg Q(y) \to \neg P(x))$.

21 $\forall x \exists y R(x, y), \forall x \forall y(R(x, y) \to (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$.

22 $\forall x(P(x) \vee Q(x) \to \forall z P(z)) \Rightarrow \forall z((\exists x P(x) \to P(z)) \wedge (\exists x Q(x) \to P(z)))$.

23 $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(y)), \forall z(Q(z) \to P(z) \vee P(f(z))) \Rightarrow \exists x P(x)$.

24 $\exists y P(y) \to \forall x(Q(x) \to S(x)) \Rightarrow \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee S(b)$.

25 $\exists x P(x), \forall x(P(x) \to \neg P(f(x))), \forall x(Q(x) \to Q(f(x))) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x))$.

26 $\forall x(P(x) \to \neg P(f(x))) \Rightarrow \exists x(P(x) \to Q(x))$.

27 $R(a, b, c), \forall x \forall y \forall z(R(x, y, z) \to R(y, y, z)), \forall x \forall y \forall z(R(x, y, z) \to R(x, y, y)) \Rightarrow$
$\exists x R(x, x, x)$.

28 $\forall x(P(x) \vee \neg Q(x)), \exists y(P(y) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists x P(x)$.

29 $\forall x \forall y(R(x, y) \to Q(x)), \forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \forall y(R(x, y) \to Q(x) \wedge Q(y))$.

30 $\forall x(P(x) \to \exists y Q(y) \wedge \forall y R(y)) \Rightarrow \forall x(P(x) \to \exists y Q(y)) \wedge \forall x(P(x) \to R(x))$.

31 $\forall x R(x, f(a)) \Rightarrow \exists y R(g(y), y)$.

32 $\forall x \exists y \exists z(D(x, y, z) \wedge P(y)), \forall x \forall y \forall z(D(x, y, z) \wedge P(x) \wedge P(y) \to R(x, y)) \Rightarrow$
$\exists x \exists y R(x, y)$.

33 $\forall x\exists y(R(x,y)\wedge R(y,y)), \forall x\forall y(R(x,x)\wedge R(x,y)\rightarrow\neg R(y,y))\Rightarrow .$

34 $\forall x\forall y\forall z(D(x,y,z)\rightarrow D(x,x,y)), \exists y\exists z D(a,y,z)\Rightarrow D(a,a,a).$

35 $\forall x R(x,f(x)), \forall x\forall y(R(f(x),f(y))\rightarrow R(f(x),y))\Rightarrow\exists x R(x,x)$

36 $\exists y\forall z(R(y,z)\rightarrow P(z)), \forall x\forall y\exists z(R(x,z)\wedge R(y,z))\Rightarrow\exists y(R(a,y)\wedge P(y))$

37 $\forall x\forall y(R(x,y)\rightarrow P(x)\vee P(y))\Rightarrow\exists y(\exists x R(x,y)\rightarrow P(y))$

38 $\forall x P(x), \exists x(Q(x)\wedge P(x)\rightarrow S(x))\Rightarrow\exists x(P(x)\wedge S(x))\vee\exists x\neg Q(x)$

39 $\forall y(Q(y)\wedge\neg P(y)\rightarrow P(f(y)))\Rightarrow\exists x(\exists y Q(y)\rightarrow P(x)).$

Teorema di completezza (caso predicativo) Sia dato un sequente $\Gamma_0\Rightarrow\Delta_0$ di segnatura $\sigma\cup\mathcal{C}$. Se $\nvdash\Gamma_0\Rightarrow\Delta_0$, allora esiste una struttura $\mathfrak{M}=\langle M;\sigma\cup\mathcal{C}\rangle$ tale che $\mathfrak{M}\models A$ per ogni $A\in\Gamma_0$ e $\mathfrak{M}\not\models B$ per ogni $B\in\Delta_0$. Di conseguenza, per ogni formula B, se $\nvdash B$, allora $\not\models B$.

Osservazione. Come nel caso proposizionale, l'enunciato del teorema è di tipo esistenziale " ... allora esiste una struttura $\mathfrak{M}=\langle M;\sigma\cup\mathcal{C}\rangle$ tale che ... ", ma come vedremo dalla dimostrazione non si tratta di un'esistenza di tipo costruttivo e sarà assai laborioso darne una prova.

Consapevoli delle difficoltà evidenziate negli esempi dobbiamo mettere in piedi una strategia di trasformazione dei sequenti 'con meno gradi di libertà' rispetto a quella approntata per il caso proposizionale.

Prima di tutto dobbiamo tornare a considerare sia la parte sinistra che la parte destra di un sequente come successioni ordinate di formule anzichè multinsiemi.

Ci servono le seguenti definizioni preliminari.

Definizione 4.1 *Sia dato un albero di sequenti (T,δ). Per ogni ramo di T ed ogni formula A di $\mathcal{L}\cup\mathcal{C}$, diciamo che A è segnata vera in tale ramo se compare a sinistra di un simbolo di sequente, diciamo che A è segnata falsa in tale ramo se compare a destra di un simbolo di sequente.*

Definizione 4.2 *Per ogni nodo α di T, si dicono* α-atomiche

1. *le formule atomiche,*

2. *le formule del tipo $\forall xA$ segnate vere con $A(t/x)$ segnata vera in qualche nodo del ramo sotto α per ogni termine chiuso t che compaia nel ramo sotto α,*

3. *le formule del tipo $\exists xA$ segnate false con $A(t/x)$ segnata falsa in qualche nodo del ramo sotto α per ogni termine chiuso t che compaia nel ramo sotto α.*

(Per convenzione stipuliamo che la costante c_0 *compaia in ogni ramo in cui non ci sia alcuna altra costante.)*

Un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ associato ad un nodo α, è detto α-atomico *sse sia le formule di Γ che quelle di Δ sono α-atomiche.*

Definizione 4.3 *Sia (T, δ) un albero finito di sequenti.*

Se α è una foglia di T ed il sequente associato ad α è α-atomico, allora il ramo sotto α è detto terminato*.*

Se α è una foglia di T ed il sequente associato ad α è un assioma, allora il ramo sotto α è detto chiuso*.*

Se il ramo sotto ogni foglia di T è chiuso, allora l'albero (T, δ) è detto chiuso*.*

Siamo ora in grado di riformulare le regole del calcolo come *istruzioni 'dal basso'* che ci consentano di costruire alberi di sequenti in cui il principio di equità è rispettato.

Sia dato un albero di sequenti (T, δ). Si consideri una foglia α di T e sia $A_1 \dots A_i \dots A_n \Rightarrow B_1 \dots B_j \dots B_m$ il sequente associato ad α.

Sia A_i non α-atomico. Allora le S-istruzioni applicate ad A_i operano nel seguente modo:

- Se A_i è del tipo $C_1 \wedge C_2$, aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n, C_1, C_2 \Rightarrow B_1, \dots, B_m.$$

- Se A_i è del tipo $C_1 \vee C_2$, aggiungiamo i nodi $\alpha 1$ e $\alpha 2$ e li etichettiamo con
$$A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n, C_1 \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

e
$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n, C_2 \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$$
rispettivamente.

- Se A_i è del tipo $\neg C$, aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m, C$$

- Se A_i è del tipo $C_1 \to C_2$, aggiungiamo i nodi $\alpha 1$ e $\alpha 2$ e li etichettiamo rispettivamente con
$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m, C_1$$
e con
$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n, C_2 \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$$

- Se A_i è del tipo $\exists x C$, aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n, C(c) \Rightarrow B_1, \ldots, B_m,$$
dove c è un parametro che non compare in $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$.

- Se A_i è del tipo $\forall x C$, siano $t_1, \ldots, t_s$ i termini chiusi di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ che compaiono nel ramo sotto α con $C(t_j/x)$ che non compare segnata vera in tale ramo; aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n, C(t_1), \ldots, C(t_s), \forall x C \Rightarrow B_1, \ldots, B_m.$$

Sia B_j non α-atomico. Allora le D-istruzioni applicate a B_j operano nel seguente modo: sia B_j una formula nella parte destra di $\delta(\alpha)$ che non sia α-atomica, allora

- Se B_j è del tipo $C_1 \vee C_2$, aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_m, C_1, C_2.$$

- Se B_j è del tipo $C_1 \wedge C_2$, aggiungiamo i nodi $\alpha 1$ e $\alpha 2$ e li etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_m, C_1$$
e
$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_m, C_2$$
rispettivamente.

- Se B_j è del tipo $\neg C$, aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_n, C \Rightarrow B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_m$$

- Se B_j è del tipo $C_1 \rightarrow C_2$, aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots A_n, C_1 \Rightarrow B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_m, C_2.$$

- Se B_j è del tipo $\forall x C$, aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_m, C(c)$$
dove c è un parametro che non compare in $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$.

- Se B_j è del tipo $\exists x C$, siano $t_1, \ldots, t_r$ i termini chiusi di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ che compaiono nel ramo sotto α con $A(t_h/x)$ che non compare segnata falsa in tale ramo; aggiungiamo il nodo $\alpha 1$ e lo etichettiamo con
$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_m, C(t_1), \ldots, C(t_r), \exists x C.$$

Osserviamo che le S-istruzioni e le D-istruzioni sono istruzioni per aggiungere nuovi nodi a un albero dato e per etichettare in maniera opportuna i nuovi nodi ottenuti. Si noti anche che, sia nel caso delle S-istruzioni che in quello delle D-istruzioni, quando analizziamo una formula, la cancelliamo, salvo eventualmente riscriverla all'ultimo posto. Questo spostamento è il punto essenziale della procedura che descriveremo in seguito e garantisce che ogni formula analizzabile verrà prima o poi analizzata. Senza questo accorgimento, mancherebbe il requisito di equità e, come visto prima, una tavola inizializzata per esempio a $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow A, \neg A$ potrebbe non chiudere.

Catene di alberi di refutazione

Una catena di alberi di refutazione è una successione (finita o infinita) di alberi finiti di sequenti $(T_0, \delta_0), (T_1, \delta_1), \ldots, (T_n, \delta_n), \ldots$ tali che per ogni i, (T_{i+1}, δ_{i+1}) è ottenuto da (T_i, δ_i) via applicazione di una delle istruzioni date. Affinchè la procedura dia luogo a catene che ottemperino al principio di equità i nodi degli alberi verranno marcati con la lettera S o con la lettera D. Il significato inteso è che se un nodo è marcato con S(D), allora al sequente ad esso associato si applicherà una S-istruzione (D-istruzione).

Sia dato il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Definiamo la seguente catena di alberi di refutazione inizializzata su $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

(T_0, δ_0) è così definito: T_0 consta della sola radice segnata S[12] e $\delta(\epsilon)$ è $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Supponiamo che (T_{k-1}, δ_{k-1}) sia già stato definito. Vogliamo definire (T_k, δ_k).

1 L'albero (T_{k-1}, δ_{k-1}) è chiuso. La procedura si ferma e l'albero (T_{k-1}, δ_{k-1}) è una dimostrazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

2 L'albero (T_{k-1}, δ_{k-1}) non è chiuso. Consideriamo solo le foglie non-chiuse e distinguiamo:

2.1 Per almeno una foglia (non-chiusa) α, il ramo sotto α è terminato. La procedura si ferma. Vedremo come il ramo sotto α dia luogo ad un contromodello per $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

2.2 Per ogni foglia (non-chiusa) α, il ramo sotto α è non-terminato. Si proceda come indicato di seguito.

Sia $\delta_{k-1}(\alpha) = A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots B_m$.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots B_m$ non è α-atomico, altrimenti il ramo sotto α sarebbe terminato.

Sia α marcato S. Supponiamo prima che tutte le formule $A_1, \ldots, A_n$ siano α-atomiche. In questo caso invertiamo la marcatura di α (cioè marchiamo α con D) e applichiamo la D-istruzione opportuna alla prima delle formule $B_1, \ldots, B_m$ che non è α-atomica (osserviamo che tale formula esiste, in quanto $\delta_{k-1}(\alpha)$ non è α-atomico e tutte le formule $A_1, \ldots, A_n$ sono α-atomiche) e marchiamo con S tutte le foglie ottenute in questo modo. Supponiamo ora

[12] E' indifferente partire con la radice segnata S o segnata D.

che non tutte le formule $A_1, \ldots, A_n$ siano α-atomiche. In questo caso applichiamo la S-istruzione opportuna alla prima delle formule $A_1, \ldots, A_n$ che non è α-atomica e marchiamo con D tutte le foglie ottenute in questo modo.

Sia α marcata D. Supponiamo prima che tutte le formule $B_1, \ldots, B_m$ siano α-atomiche. In questo caso invertiamo la marcatura di α (cioè marchiamo α con S) e applichiamo la S-istruzione opportuna alla prima delle formule $A_1, \ldots, A_n$ che non è α-atomica (osserviamo che tale formula esiste, in quanto $\delta_{k-1}(\alpha)$ non è α-atomico e tutte le formule $B_1, \ldots, B_m$ sono α-atomiche) e marchiamo con D tutte le foglie ottenute in questo modo. Supponiamo ora che non tutte le formule $B_1, \ldots, B_m$ siano α-atomiche. In questo caso applichiamo la D-istruzione opportuna alla prima delle formule $B_1, \ldots, B_m$ che non è α-atomica e marchiamo con S tutte le foglie ottenute in questo modo.

La procedura che abbiamo definito lascia libertà nel selezionare le foglie, nel caso vi sia una pluralità di scelte; per ottenere il massimo delle possibilità di terminazione, si dovrebbero (ma è più costoso) selezionare le foglie in parallelo.[13]

Definizione 4.4 *Sia data una catena (finita o infinita) di alberi di refutazione* (T_0, δ_0), (T_1, δ_1), $\ldots$, (T_n, δ_n),$\ldots$ *L'unione su tale catena che indichiamo con* $\bigcup_n \{(T_n, \delta_n)\}$ *è detta* tavola di refutazione.

Se la catena è finita, ad esempio consta di (T_0, δ_0), (T_1, δ_1), $\ldots$, (T_n, δ_n), l'unione coincide con (T_n, δ_n) e quindi la tavola di refutazione è un albero finito, se invece la catena consta di infiniti alberi di refutazione, $\bigcup_n \{(T_n, \delta_n)\}$ è un albero infinito.

Definizione 4.5 *Una tavola di refutazione è* completa *se ogni suo ramo è finito e chiuso oppure finito e terminato oppure infinito.*

Un ramo di una tavola completa è aperto *se è terminato e non-chiuso oppure infinito.*

Lemma 4.6 *Per ogni sequente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *esiste una tavola completa inizializzata su* $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

[13] La strategia in parallelo non è indispensabile per la correttezza e completezza dell'algoritmo: se vi è terminazione con chiusura della tavola, questa terminazione si avrà comunque. Si rischia solo di avere non terminazione invece che terminazione con un ramo aperto finito, ma entrambe le eventualità corrispondono al caso in cui il sequente in radice non è una verità logica.

Dim. Si costruisca una catena di alberi di refutazione inizializzata su $\Gamma \Rightarrow \Delta$ secondo la procedura sopra illustrata. La catena è finita. Allora all'ultimo albero (T_n, δ_n) la procedura si ferma e due sono i casi: ogni ramo di (T_n, δ_n) è chiuso oppure almeno un ramo di (T_n, δ_n) è non-chiuso e terminato. In ambedue i casi (T_n, δ_n) è una tavola completa. La catena è infinita. Per ogni albero (T_n, δ_n) della catena deve esistere un ramo non-chiuso e non-terminato. Applicando la procedura di costruzione degli alberi di refutazione alla foglia α del ramo in questione si ottiene un nuovo albero (T_{n+1}, δ_{n+1}) che estende propriamente il precedente. Quindi la successione è composta di alberi che si includono propriamente e $\bigcup_n \{(T_n, \delta_n)\}$ è un albero finitario con infiniti nodi. Per il lemma di König, tale tavola deve avere un ramo infinito e dunque è una tavola completa.

Lemma 4.7 *Ogni ramo aperto di una tavola completa determina una coppia di insiemi di Hintikka, cioè una coppia di insiemi di enunciati (V, F) di $\sigma \cup \mathcal{C}$, tali che:*

(H0) *nessuna formula atomica chiusa di $\sigma \cup \mathcal{C}$ appartiene sia a V che ad F;*

(H1) *se V contiene $A_1 \wedge A_2$, allora contiene A_1 e A_2;*

(H2) *se V contiene $A_1 \vee A_2$, allora contiene A_1 o A_2;*

(H3) *se V contiene $A_1 \rightarrow A_2$, allora (F contiene A_1 oppure V contiene A_2);*

(H4) *se V contiene $\neg A$, allora contiene F contiene A;*

(H5) *se V contiene $\exists x A$, allora contiene $A(t)$ per qualche termine chiuso t di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$;*[14]

(H6) *se V contiene $\forall x A$, allora contiene $A(t)$ per ogni termine chiuso t di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ che compare in qualche formula di $V \cup F$;*

(H7) *se F contiene $A_1 \vee A_2$, allora contiene A_1 e A_2;*

(H8) *se F contiene $A_1 \wedge A_2$, allora contiene A_1 o A_2;*

(H9) *se F contiene $A_1 \rightarrow A_2$, allora V contiene A_1 e F contiene A_2;*

[14]Per come è stata definita la nostra procedura, questo t sarà in effetti un certo parametro c.

(H10) *se F contiene $\neg A$, allora contiene V contiene A;*

(H11) *se F contiene $\forall x A$, allora contiene $A(t)$ per qualche termine chiuso t di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$;*

(H12) *se F contiene $\exists x A$, allora contiene $A(t)$ per ogni termine chiuso t di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ che compare in qualche formula di $V \cup F$.*

Dim. Sia ρ un ramo aperto di una tavola completa. Poniamo $V = \{A : A$ è segnata vera nel ramo $\rho\}$ e poniamo $F = \{A : A$ è segnata falsa nel ramo $\rho\}$.

Le proprietà (H0)-(H12) seguono dalla considerazione fatta sopra circa gli spostamenti in coda. Ad esempio, per verificare (H6) basta considerare quell'i tale che $\forall x A$ compare a sinistra di $\Rightarrow$ in $\delta(\alpha_i)$ e t compare nel ramo sotto α_i (tale i esiste, perché le formule universalmente quantificate a sinistra di $\Rightarrow$ non vengono mai cancellate, quindi $\forall x A$ continua ad esserci anche se t compare per la prima volta in uno stadio molto avanzato). Se $A(t)$ non è segnata vera nel ramo sotto α_i, allora $\forall x A$ non è α_i-atomica. Supponiamo che $\forall x A$ compaia al j-esimo posto a sinistra di $\Rightarrow$ nel sequente $\delta(\alpha_i)$ e che il nodo α_i sia generato al passo k_i. Al peggio al passo k_{i+2j}, la formula $\forall x A$ sarà presa in considerazione dalla procedura: infatti le $A_1, \ldots, A_{j-1}$ vengono rimosse o spostate in coda o sono persistentemente α_v-atomiche negli stadi intermedi $v = i + 1, \ldots, i + 2j$ (anche le nuove formule introdotte via via sono messe in coda); $A(t)$ si troverà quindi ad essere prima o poi aggiunta a sinistra di $\Rightarrow$ vuoi perché $\forall x A(x)$ persiste nel non essere α_v-atomica negli stadi intermedi v e viene pertanto selezionata dalla procedura vuoi perché $A(t)$ viene casualmente aggiunta a sinistra di $\Rightarrow$ in conseguenza dell'analisi di un'altra formula.

Le altre proprietà della lista (H0)-(H12) si verificano in modo analogo. Si noti che (H0) vale perché le formule atomiche non vengono mai rimosse e non ci può essere α_i tale che $\delta(\alpha_i)$ contenga sia a destra che a sinistra di $\Rightarrow$ una stessa formula (altrimenti, il ramo sotto α_i sarebbe terminato e chiuso al passo k_i). QED

Il prossimo lemma dice come convertire una coppia di insiemi di Hintikka (V, F) in una struttura che rende vere le formula $A \in V$ e false le formule $A \in F$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema di completezza, perché le formule di Γ_0 sono segnate vere e quelle di Δ_0 sono segnate false, da cui $\Gamma_0 \not\models Delta_0$.

Lemma 4.8 *Data una coppia di insiemi di Hintikka* (V, F) *nel linguaggio* $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$*, esiste una struttura* $\mathfrak{M}_H = \langle M_H; \sigma \cup \mathcal{C} \rangle$ *tale che* $\mathfrak{M}_H \models A$ *per ogni* $A \in V$ *e* $\mathfrak{M}_H \not\models A$ *per ogni* $A \in F$*.*

Dim. Definiamo una struttura $\mathfrak{M}_H = \langle M_H; \sigma \cup \mathcal{C} \rangle$ nel modo seguente:

M_H è l'insieme dei termini chiusi che occorrono in $V \cup F$,

per ogni simbolo funzionale f^n che occorra in $V \cup F$,

$$\hat{f}^n(t_1, ..., t_n) = f^n(t_1, ..., t_n),$$

altrimenti $\hat{f}^n(t_1, ..., t_n)$ è definito arbitrariamente.

per ogni predicato n-ario P^n,

$$\hat{P}^n = \{\langle t_1, \ldots, t_n \rangle : P^n(t_1, \ldots, t_n) \in V\}.$$

Per induzione è facile verificare che
(*)

$$\hat{t} = t$$

per ogni termine chiuso di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ che occorre in $V \cup F$ (si osservi che se un termine occorre in un insieme di formule, anche i suoi sottotermini banalmente vi occorrono).

Verifichiamo ora per induzione su A che, se $A \in V$ allora $\mathfrak{M}_H \models A$ e se $A \in F$ allora $\mathfrak{M}_H \not\models A$.

- Sia A atomica, diciamo $P(t_1, \ldots, t_n)$. Allora $M_H \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sse $\langle \hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_n \rangle \in \hat{P}^n$ sse (per (*)) $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \hat{P}^n$ sse $P(t_1, \ldots, t_n) \in V$. Quindi se $A \in V$, $\mathfrak{M}_H \models A$ e se $A \in F$, A non può appartenere a V per (H0), perciò $\mathfrak{M}_H \not\models A$.

- Sia A uguale a $A_1 \wedge A_2$. Se $A \in V$, allora $A_1, A_2 \in V$ per (H1); allora per ipotesi induttiva $\mathfrak{M}_H \models A_1$ e $\mathfrak{M}_H \models A_2$ da cui $\mathfrak{M}_H \models A_1 \wedge A_2$.

  Se $A \in F$, allora $A_i \in F$ $(i = 1 \text{ o } 2)$ per (H8), quindi per ipotesi induttiva $\mathfrak{M}_H \not\models A_i$ da cui $M_H \not\models A$.

- Sia A uguale a $\neg B$. Se $A \in V$, allora $B \in F$ per (H4), perciò $\mathfrak{M}_H \not\models B$ (per ipotesi induttiva) da cui $\mathfrak{M}_H \models \neg B$. Analogamente, se $A \in F$, $B \in V$ per (H10) perciò $\mathfrak{M}_H \models B$ e $\mathfrak{M}_H \not\models \neg B$.

- I casi di $\vee$ e $\rightarrow$ si trattano analogamente ai precedenti.
- Sia A uguale a $\exists xB$. Se $A \in V$, allora $B(t) \in V$ per qualche $t \in M_H$ (per (H5)), quindi $\mathfrak{M}_H \models B(t)$ (per ipotesi induttiva) e perciò $\mathfrak{M}_H \models \exists xB(x)$ (per l'interpretazione sostituzionale delle clausole di verità dei quantificatori). Se $A \in F$, allora $B(t) \in F$ per ogni $t \in M_H$ per (H12), perciò $\mathfrak{M}_H \not\models B(t)$ per ogni $t \in M_H$ per ipotesi induttiva. Non può essere che $\mathfrak{M} \models \exists xB$, altrimenti ci sarebbe un $m \in M_H$ tale che $\mathfrak{M}_H \models B(\bar{m}/x)$. Tuttavia ogni $m \in M_H$ è un qualche termine chiuso t di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ che occorre in $V \cup F$; e poiché $m = t = \hat{t}$, $\mathfrak{M}_H \models B(t)$ in contraddizione con l'ipotesi di induzione.
- Se A è $\forall xB$ si ragiona analogamente. QED

Definizione 4.9 *Dati due nodi α, β di un albero T, β è* successore di α *sse esistono n+1 nodi $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tali che*

- $\alpha_0 = \alpha$,
- $\alpha_n = \beta$, *e*
- *per ogni $i, 1 \leq i \leq n$, α_i è successore immediato di α_{i-1}.*

Lemma 4.10 *(di König) Ogni albero finitario e infinito possiede un ramo infinito.*

Dim.[15] Assumiamo che T sia un albero finitario e infinito. I nodi di T si dividono in due categorie: quelli con al massimo un numero finito di successori e quelli con un numero infinito di successori. Notiamo i seguenti due fatti: (1) La radice di T ha infiniti successori. (2) Se un nodo ha infiniti successori, allora almeno uno dei suoi immediati successori ha infiniti successori.

L'asserzione (1) segue dall'assunzione che T è infinito. Per dimostrare (2), sia α un nodo qualsiasi. Poiché T è finitario, α ha al massimo un numero finito di successori immediati; se ognuno di questi avesse al massimo un

[15] Da K. Segerberg, *Classical Propositional Operators*, OUP, 1982, 18-19.

numero finito di successori, allora anche α avrebbe al massimo un numero finito di successori. Questo dimostra (2) contrapposto. Ora definiamo una successione α_i, $i \in N^+$, di nodi tale che ogni α_i ha infiniti successori. Primo, sia α_0 la radice dell'albero, per la condizione (1) α_0 ha infiniti successori. Sia ora j un numero naturale e supponiamo di avere già definito α_0, ..., α_j, ove α_j ha infiniti successori. Allora poniamo per definizione $\alpha_{j+1} = \alpha_j\, k$, ove k è il più piccolo numero naturale tale che $\alpha_j\, k$ è un nodo di T con infiniti successori. Per (1) e (2), la definizione è corretta. La successione α_0, ..., α_j, α_{j+1}, ... definita dalla procedura ora descritta è un ramo infinito di T. QED

Lemma 4.11 *Sia A senza quantificatori. Allora A è dimostrabile sse è dimostrabile nel calcolo proposizionale.*

Se $\Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n B$ con B senza quantificatori è dimostrabile, allora $\Rightarrow B$ è dimostrabile.

Se $\Rightarrow \exists x B$ con B senza quantificatori è dimostrabile, allora $\Rightarrow B(t_1) \vee \cdots \vee B(t_n)$ è dimostrabile per certi $t_1, \ldots t_n$. (Corollario del teorema di Herbrand.)

Nota. Se $\Rightarrow \exists x B$ con B senza quantificatori è dimostrabile, non è detto che $\Rightarrow B(t)$ sia dimostrabile per qualche t. Esempio:

$\Rightarrow \exists x(P(a) \vee P(b) \to P(x))$ è dimostrabile, ma $\Rightarrow P(a) \vee P(b) \to P(t)$ non è dimostrabile per alcun t. (Esercizio: si dia la dimostrazione di $\Rightarrow \exists x(P(a) \vee P(b) \to P(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pa,\ Pa \vee Pb \Rightarrow Pb,\ Pa, \qquad Pb,\ Pa \vee Pb \Rightarrow Pb,\ Pa}{Pa \vee Pb,\ Pa \vee Pb \Rightarrow Pb,\ Pa}}{Pa \vee Pb \Rightarrow Pb,\ (Pa \vee Pb) \to Pa}}{\Rightarrow (Pa \vee Pb) \to Pb,\ (Pa \vee Pb) \to Pa}}{\Rightarrow \exists x(Pa \vee Pb \to Px),\ (Pa \vee Pb) \to Pa}}{\Rightarrow \exists x(Pa \vee Pb \to Px)}$$

$\exists x(Pa \vee Pb \to Px)$ è dimostrabile, mentre $(Pa \vee Pb) \to Pt$ non lo è.

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

Regole di inferenza strutturali

$$S-\pi \quad \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2, B, \Gamma_3 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_3, B, \Gamma_2, A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta}$$

$$D-\pi \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, \Delta_2, B, \Delta_3}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, \Delta_2, A, \Delta_3}$$

$$S-\alpha \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$D-\alpha \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

$$S-\gamma \quad \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$D-\gamma \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Regole di inferenza operazionali

$$D\wedge \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B}$$

$$S\wedge \quad \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$S\vee \quad \frac{A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2, \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}$$

$$D\vee \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$D\neg \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

$$S\neg \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$D\rightarrow \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$S\rightarrow \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}$$

$$S\forall \; \frac{A(t/x), \forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$D\exists \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A, A(t/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$$

$$D\forall \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(c/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$S\exists \; \frac{A(c/x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

dove t è un termine chiuso di $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$, e c è un parametro che non compare in A, Γ, Δ.

I due calcoli sono equivalenti.

Teorema di inversione nell'applicazione delle regole

Teorema della mediana (o del sequente mediano) di Herbrand