TAUTOLOGIE NOTEVOLI

- Principio del terzo escluso: $A \vee \neg A$

- Principio di non contraddizione:

  $\neg(A \wedge \neg A)$

- Principio di identità: $A \rightarrow A$

- Legge della doppia negazione: $A \leftrightarrow \neg\neg A$

- *Consequentia mirabilis*: $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

- *Ex falso quodlibet* (legge di Duns Scoto):

  $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$

- *A fortiori*: $A \to (B \to A)$

- *Modus (ponendo) ponens*:

  $[(A \to B) \wedge A] \to B$

- *Modus (tollendo) tollens*:

  $[(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$

- *Modus tollendo ponens* (regola del sillogismo disgiuntivo):
  $[(A \vee B) \wedge \neg A] \to B$
  $[(A \vee B) \wedge \neg B] \to A$

- *Modus ponendo tollens*:
  $[(A aut B) \wedge A] \to \neg B$
  $[(A aut B) \wedge B] \to \neg A$

- Legge di Filone: $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

- Legge di Crisippo: $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

- Leggi di De Morgan:
  $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
  $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

- Leggi della Negazione minimale:
  $[(A \to B) \wedge (A \to \neg B)] \to \neg A$
  $(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$

- Leggi di idempotenza:
  $A \wedge A \leftrightarrow A$, $A \vee A \leftrightarrow A$

- Leggi di assorbimento:
  $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$, $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

- Principio di introduzione della congiunzione:
  $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to B \wedge C)$

- Principio di eliminazione della congiunzione:
$A \land B \to A$, $A \land B \to B$

- Principio di introduzione della disgiunzione:
$A \to A \lor B$, $B \to A \lor B$

- Principio di eliminazione della disgiunzione (o di distinzione dei casi):
$((B \to A) \land (C \to A)) \to (B \lor C \to A)$

- Sillogismo ipotetico (o proprietà transitiva dell'implicazione):
$[(A \to B) \land (B \to C)] \to (A \to C)$

- Leggi di contrapposizione:
$(\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A)$
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
$(A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to \neg A)$
$(\neg A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to A)$

- Legge di importazione-exportazione:
  $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C)$

- Legge di Peirce: $[(A \to B) \to A] \to A$

- Legge di Frege:
  $[A \to (B \to C)] \leftrightarrow [(A \to B) \to (A \to C)]$

- Proprietà associativa della congiunzione:

  $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

- Proprietà associativa della disgiunzione:
  $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

- Proprietà associativa del bicondizionale:
  $[A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)] \leftrightarrow [(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C]$

- Proprietà commutativa della congiunzione:

  $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

- Proprietà commutativa della disgiunzione:

  $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

- Proprietà commutativa del bicondizionale:

  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

- Proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione:
  $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

- Proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:
  $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Rapporto tra negazione e connettivi

$\neg\neg A \leftrightarrow A$
$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
$\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

Formule valide notevoli

Quantificatori e negazione

$$\neg\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$
$$\neg\exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$
$$\neg\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \leftrightarrow \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$
$$\neg\exists x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

Quantificatori e connettivi binari

Posto che x **non occorra libera in** C, i seguenti schemi sono validi:

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$
$$\forall x (A(x) \vee C) \leftrightarrow \forall x A(x) \vee C$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow C) \leftrightarrow (\exists x A(x) \rightarrow C)$$
$$\forall x (C \rightarrow A(x)) \leftrightarrow (C \rightarrow \forall x A(x))$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$$

$$\exists x(A(x) \land B(x)) \to \exists x A(x) \land \exists x B(x)$$
$$\exists x A(x) \land C \leftrightarrow \exists x(A(x) \land C)$$

$$\exists x(A(x) \lor B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \to C) \leftrightarrow (\forall x A(x) \to C)$$
$$\exists x(C \to A(x)) \leftrightarrow (C \to \exists x A(x))$$

$$\forall x A(x) \land \exists x B(x) \to \exists x(A(x) \land B(x))$$