Linguaggio enunciativo e valutazioni

November 5, 2005

L'*alfabeto di un linguaggio enunciativo* $\mathcal{L}^0$ consta di:

1. un insieme infinito numerabile di lettere enunciative $p_0, p_1, p_2, \ldots$
2. i connettivi logici : $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
3. simboli ausilisri: (,)

Definizione per induzione di formula ben formata, fbf..

1. ogni lettera enunciativa p_i è una fbf
2. se A è una fbf anche $(\neg A)$ è una fbf,
3. se A e B sono fbf, anche $(A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ sono fbf.

Le fbf di un linguaggio enunciativo sono anche dette *enunciati*.

Sia $\mathcal{L}^0$ un linguaggio enunciativo.

Una *interpretazione* I è un'assegnazione di valori di verità alle **lettere enunciative** di $\mathcal{L}^0$, ovvero $\mathcal{I}$ è una funzione

$$\mathcal{I}\text{: lettere enunciative} \rightarrow \{0,\ 1\}.$$

Quindi per ogni lettera enunciativa p, $\mathcal{I}(p) = 0$ oppure $\mathcal{I}(p) = 1$.

La *valutazione* $v^{\mathcal{I}}$, indotta da I, è una funzione che associa un valore di verità ad **ogni enunciato** di $\mathcal{L}^0$ e che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $v^{\mathcal{I}}(p) = \mathcal{I}(p)$
2. $v^{\mathcal{I}}(\neg A) = 1 - v^{\mathcal{I}}(A)$
3. $v^{\mathcal{I}}(A \wedge B) = min(v^{\mathcal{I}}(A),\ v^{\mathcal{I}}(B))$
4. $v^{\mathcal{I}}(A \vee B) = max(v^{\mathcal{I}}(A),\ v^{\mathcal{I}}(B))$
5. $v^{\mathcal{I}}(A \rightarrow B) = max(1 - v^{\mathcal{I}}(A),\ v^{\mathcal{I}}(B))$
6. $v^{\mathcal{I}}(A \leftrightarrow B) = min[max(1 - v^{\mathcal{I}}(A),\ v^{\mathcal{I}}(B)),\ max(1 - v^{\mathcal{I}}(B),\ v^{\mathcal{I}}(A))]$

Definizione. A è una *tautologia* sse per **ogni** interpretazione $\mathcal{I}$, $v^{\mathcal{I}}(A) = 1$.

Definizione. A è *conseguenza logica di* $B_1, \ldots, B_n$ sse per **ogni** interpretazione $\mathcal{I}$, se $v^{\mathcal{I}}(B_1) = 1$ e .... e $v^{\mathcal{I}}(B_n) = 1$ allora $v^{\mathcal{I}}(A) = 1$.

Definizione. Sia $\mathcal{I}$ una interpretazione. Se $v^{\mathcal{I}}(A) = 1$, diciamo che $\mathcal{I}$ è *modello* di A; se $v^{\mathcal{I}}(A) = 0$, diciamo che $\mathcal{I}$ è *contromodello* di A.

Definizione. Una formula A è *soddisfacibile* sse per **qualche** $\mathcal{I}$, $v^{\mathcal{I}}(A) = 1$.

Una formula A è *insoddisfacibile* sse per **ogni** $\mathcal{I}$, $\mathcal{V}^{\mathcal{I}}(A) = 0$.

Un insieme di formule $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ è *soddisfacibile* sse per **qualche** $\mathcal{I}$, $v^{\mathcal{I}}(A_1) = 1$ e ... e $v^{\mathcal{I}}(A_n) = 1$.

Esercizio. A è conseguenza logica di $B_1, \ldots, B_n$ sse l'insieme $\{B_1, \ldots, B_n, \neg A\}$ è *insoddisfacibile*.

Nota. La funzione di valutazione $v^{\mathcal{I}}$ indotta da $\mathcal{I}$ può essere definita equivalentemente nel seguente modo:

$v^{\mathcal{I}}(p) = 1$	sse	$\mathcal{I}(p) = 1$
$v^{\mathcal{I}}(\neg A) = 1$	sse	$v^{\mathcal{I}}(A) = 0$
$v^{\mathcal{I}}(A \wedge B) = 1$	sse	$v^{\mathcal{I}}(A) = 1$ e $v^{\mathcal{I}}(B) = 1$
$v^{\mathcal{I}}(A \vee B) = 1$	sse	$v^{\mathcal{I}}(A) = 1$ oppure $v^{\mathcal{I}}(B) = 1$
$v^{\mathcal{I}}(A \to B) = 1$	sse	$v^{\mathcal{I}}(A) = 0$ oppure $v^{\mathcal{I}}(B) = 1$
$v^{\mathcal{I}}(A \leftrightarrow B) = 1$	sse	$v^{\mathcal{I}}(A) = v^{\mathcal{I}}(B)$

Importante! La seguente definizione alternativa è molto usata. Data una interpretazione $\mathcal{I}$, invece di definire quand' è che la valutazione $v^{\mathcal{I}}$ associa valore 1 ad un enunciato A, si definisce quand' è che un enunciato A *è vero in* I, in simboli $\mathcal{I} \models A$.

$\mathcal{I} \models p$	sse	$\mathcal{I}(p) = 1$
$\mathcal{I} \models \neg A$	sse	$\mathcal{I} \not\models A$
$\mathcal{I} \models A \wedge B$	sse	$\mathcal{I} \models A$ e $\mathcal{I} \models B$
$\mathcal{I} \models A \vee B$	sse	$\mathcal{I} \models A$ oppure $\mathcal{I} \models B$
$\mathcal{I} \models A \to B$	sse	$\mathcal{I} \not\models A$ oppure $\mathcal{I} \models B$
$\mathcal{I} \models A \leftrightarrow B$	sse	$\mathcal{I} \models A$ sse $\mathcal{I} \models B$

E' facile mostrare che per ogni enunciato A,

$$v^{\mathcal{I}}(A) = 1 \qquad \textit{sse} \qquad \mathcal{I} \models A$$

Esercizio. Mostra quanto sopra asserito.