

I teoremi di Gödel

Giovanna Corsi

Dicembre 2003

Indice

1	Aritmetizzazione. Numeri di Gödel	2
2	Teoremi limitativi per PA	3
3	L'aritmetica di Robinson	7
4	Il predicato $Teor_{PA}$	8
5	I teoremi di Gödel da un punto di vista astratto	11

1 Aritmetizzazione. Numeri di Gödel

Data una qualsiasi teoria T del primo ordine, associamo ad ogni simbolo u del linguaggio di T un intero positivo $g(u)$, detto il numero di gödel di u , nel modo seguente.¹

$g(\neg) = 3$, $g(\wedge) = 5$; $g(\vee) = 7$; $g(\rightarrow) = 11$; $g(\forall) = 13$; $g(\exists) = 17$;
 $g(()) = 19$; $g() = 23$; $g(,) = 29$;

- $g(x_k) = 23 + 8k$ per $k = 1, 2, \dots$;
- $g(c_k) = 29 + 8k$ per $k = 1, 2, \dots$;
- $g(P_k^n) = 31 + 8(2^n 3^k)$ per $k, n \geq 1, 2, \dots$;
- $g(f_k^n) = 33 + 8(2^n 3^k)$ per $k, n \geq 1, 2, \dots$;

Così simboli diversi hanno numeri di Gödel diversi ed ogni numero di Gödel è un intero dispari.

Data una espressione (parola) $u_1 u_2 \dots u_r$, definiamo il suo numero di Gödel come $g(u_1 u_2 \dots u_r) = 2^{g(u_1)} \cdot 3^{g(u_2)} \cdot \dots \cdot p_{r-1}^{g(u_r)}$, dove p_i è l' i -esimo numero primo e $p_0 = 2$. Per esempio $g(P_1^2(x_1, x_2)) = 2^{g(P_1^2)} \cdot 3^{g(())} \cdot 5^{g(x_1)} \cdot 7^{g(,)} \cdot 11^{g(x_2)} \cdot 13^{g()} = 2^{127} \cdot 3^{19} \cdot 5^{31} \cdot 7^{29} \cdot 11^{39} \cdot 13^{23}$.

Si osservi che espressioni diverse hanno numeri di Gödel diversi per l'unicità della fattorizzazione in numeri primi. Inoltre, espressioni e simboli hanno numeri di Gödel diversi poichè quest'ultimi hanno numeri di Gödel pari, mentre gli altri hanno numeri di Gödel dispari. (Un singolo simbolo, considerato come una espressione ha un numero diverso dal suo numero di Gödel in quanto simbolo.) Se abbiamo una successione finita arbitraria di espressioni $e_1 e_2 \dots e_r$, possiamo assegnare un numero di Gödel a questa successione ponendo $g(e_1 e_2 \dots e_r) = 2^{g(e_1)} \cdot 3^{g(e_2)} \cdot \dots \cdot p_{r-1}^{g(e_r)}$. Successioni diverse di espressioni hanno numeri di gödel diversi. Poichè un numero di Gödel di una successione di espressioni è pari e l'esponente di 2 nella sua fattorizzazione in numeri primi è pure pari, differisce dai numeri di Gödel di simboli e di espressioni.

¹Ripreso da Mendelson *Logica matematica*.

Quindi g è una funzione 1-1 dall'insieme dei simboli di T , espressioni di T e successioni finite di espressioni di T , nell'insieme degli interi positivi. Il codominio di g non è tutto l'insieme degli interi positivi, per esempio 10 non è un numero di Gödel. Nel seguito risulterà utile usare gli apici angolati $\ulcorner \alpha \urcorner$ per indicare il numero di Gödel di α (α è un simbolo o una espressione o una successione finita di espressioni di T) invece di $g(\alpha)$. Con $\bar{\alpha}$ indicheremo invece il *numerale* corrispondente al numero di Gödel di α .

Consideriamo la relazione binaria $sost(x, y) \subseteq N^2$ tale che:

$sost(n, m)$ vale sse n è il gödeliano di una formula con una variabile libera $A(x)$ e $m = \ulcorner A(x/\ulcorner A(x) \urcorner) \urcorner$, ovvero m è il gödeliano di $A(x/\ulcorner A(x) \urcorner)$.

Consideriamo la relazione binaria $prova(x, y) \subseteq N^2$ tale che:

$prova(n, m)$ vale sse n è il gödeliano di una dimostrazione di una formula che ha gödeliano m .

2 Teoremi limitativi per PA

Lemma 2.1 *Esiste una formula di PA con due variabili libere, $\Delta(x, y)$ tale che*

*per ogni $n, m \in N$, se $sost(n, m)$ allora $PA \vdash \Delta(\bar{n}, \bar{m})$
se non vale $sost(n, m)$ allora $PA \vdash \neg \Delta(\bar{n}, \bar{m})$.*

Esiste una formula di PA con due variabili libere, $Dim(x, y)$ tale che per ogni $n, m \in N$, se $prova(n, m)$ allora $PA \vdash Dim(\bar{n}, \bar{m})$

se non vale $prova(n, m)$ allora $PA \vdash \neg Dim(\bar{n}, \bar{m})$.

DIM. $sost(x, y)$ e $prova(x, y)$ sono relazioni (primitive) ricorsive e quindi fortemente rappresentabili in PA. Si veda Mendelson, *Introduction to mathematical logic* oppure Hamilton *Logic for mathematicians*.

Una teoria T in cui le relazioni e le funzioni ricorsive siano fortemente rappresentabili è detta *sufficientemente potente*.

Segue che

Lemma 2.2 $PA \vdash \Delta(\overline{A(x)}, y) \leftrightarrow y = \overline{A(x/\overline{A(x)})}$, per ogni fbf $A(x)$ con una variabile libera.

Definition 2.3 *Una teoria T è ω -consistente sse non accade che*

$$\text{per ogni } n \in N, T \vdash \neg A(\bar{n}) \quad e \quad T \vdash \exists x A(x).$$

Lemma 2.4 *Se T è ω -consistente, allora è consistente.*

DIM. Si consideri una qualsiasi formula negata dimostrabile in T , per esempio $\neg\neg(x = x \rightarrow x = x)$, allora essendo T ω -consistente, $T \not\vdash \exists x\neg(x = x \rightarrow x = x)$, quindi T è consistente.

Theorem 2.5 (1° teorema di Gödel) *Se PA è ω -consistente, allora PA è incompleta; esiste un enunciato G tale che*

$$PA \not\vdash G \quad e \quad PA \not\vdash \neg G$$

DIM. Poniamo

$$F(x) := \forall y(\Delta(x, y) \rightarrow \neg\exists z Dim(z, y))$$

e

$$G := \forall y(\Delta(\overline{F(x)}, y) \rightarrow \neg\exists z Dim(z, y))$$

Supponiamo per assurdo che $PA \vdash G$. Allora esiste una dimostrazione di G in PA e quindi per qualche n abbiamo $prova(n, \ulcorner G \urcorner)$. Per il lemma 2.1 segue che

$$\begin{array}{ll} PA \vdash Dim(\overline{n}, \overline{G}) & \\ PA \vdash \exists z Dim(z, \overline{G}) & \text{particolarizzazione} \\ PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, \overline{G}) \rightarrow \neg\exists z Dim(z, \overline{G}) & \text{per definizione di } G \text{ e dal fatto che} \\ & PA \vdash G \\ PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, \overline{G}) & \text{poichè } sost(\ulcorner F(x) \urcorner, \ulcorner G \urcorner) \\ PA \vdash \neg\exists z Dim(z, \overline{G}) & \text{Modus Ponens} \end{array}$$

Ne segue che PA è inconsistente, quindi $PA \not\vdash G$.

$$\begin{array}{ll} PA \not\vdash G & \text{da quanto appena dimostrato} \\ PA \vdash \neg Dim(\overline{k}, \overline{G}), \text{ per ogni } k \in N & \text{poichè per ogni } k, \\ & \text{non } prova(k, \ulcorner G \urcorner) \\ & \text{poichè } PA \text{ è } \omega\text{-consistente} \\ PA \not\vdash \exists z Dim(z, \overline{G}) & \\ PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, y) \leftrightarrow y = \overline{\overline{F(x/F(x))}} & \text{Lemma 2.2} \\ PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, y) \leftrightarrow y = \overline{\overline{G}} & \text{poichè } \overline{\overline{G}} = \overline{\overline{F(x/F(x))}} \\ PA \not\vdash \exists y[\Delta(\overline{F(x)}, y) \wedge \exists z Dim(z, y)] & \text{logica dell'identità (righe 3 e 5)} \\ PA \not\vdash \neg\forall y[\Delta(\overline{F(x)}, y) \rightarrow \neg\exists z Dim(z, y)] & \text{logica del primo ordine} \\ PA \not\vdash \neg G & \text{definizione di } G. \end{array}$$

NOTA Consideriamo l'enunciato G . Chi è quest' y di cui si asserisce l'indimostrabilità? Per definizione di Δ , è $F(x/\overline{F(x)})$. Considerando la definizione di $F(x)$, $F(x/\overline{F(x)})$ è il gödeliano di $\forall y(\Delta(\overline{F(x)}, y) \rightarrow \neg\exists z Dim(z, y))$ e dunque è il gödeliano di G . Quindi y è il gödeliano di G , e G dice "Io sono indimostrabile".

Theorem 2.6 G è vera su N .

DIM. Facciamo vedere che

$$(*) \quad \text{per ogni } n, m \in N, \quad PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, \bar{n}) \rightarrow \neg Dim(\bar{m}, \bar{n}).$$

$PA \not\vdash G$ e dunque per ogni $m, n \in N$, non vale $prova(m, \ulcorner G \urcorner)$, da cui $PA \vdash \neg Dim(\bar{m}, \bar{G})$, per ogni $m \in N$

Sia $n = \ulcorner G \urcorner$, allora

$PA \vdash \neg Dim(\bar{m}, \bar{n})$, per ogni $m \in N$

quindi, *a fortiori* (*) vale.

Sia $n \neq \ulcorner G \urcorner$. Per il lemma 2.2 si ha che

$$PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, y) \leftrightarrow y = \overline{F(x/\overline{F(x)})}$$

$$PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, y) \leftrightarrow y = \bar{G} \text{ per def. di } G,$$

ma $PA \vdash \bar{n} \neq \bar{G}$, dunque

$$PA \vdash \neg \Delta(\overline{F(x)}, \bar{n})$$

da cui

$$PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, n) \rightarrow \neg Dim(\bar{m}, \bar{n}) \text{ per ogni } m \in N.$$

Segue
che

$$PA \vdash \Delta(\overline{F(x)}, n) \rightarrow \neg Dim(\bar{m}, \bar{n}) \text{ per ogni } m, n \in N$$

Per il teorema di validità,

$$\text{per ogni } m, n \in N, \quad N \models \Delta(\overline{F(x)}, \bar{n}) \rightarrow \neg Dim(\bar{m}, \bar{n})$$

$$\text{per ogni } m, n \in N, \quad N^{(y/n)(z/m)} \models \Delta(\overline{F(x)}, y) \rightarrow \neg Dim(z, y)$$

da cui per la semantica tarskiana,

$$N \models \forall y \forall z [\Delta(\overline{F(x)}, y) \rightarrow \neg Dim(z, y)]$$

ovvero

$$N \models \forall y [\Delta(\overline{F(x)}, y) \rightarrow \neg \exists z Dim(z, y)]$$

$$N \models G$$

Theorem 2.7 (di diagonalizzazione o del punto fisso per PA) *Se PA è consistente, allora per ogni formula con una sola variabile libera $A(y)$ esiste un enunciato B tale che*

$$PA \vdash B \leftrightarrow A(y/\overline{B})$$

DIM. Sia data $A(y)$. Poniamo

$$C(x) := \forall y(\Delta(x, y) \rightarrow A(y)) \quad \text{e} \quad B := C(x/\overline{C(x)})$$

. Allora

$$\begin{array}{ll} PA \vdash B \leftrightarrow C(x/\overline{C(x)}) & \text{per definizione di } B \\ PA \vdash B \leftrightarrow \forall y(\Delta(\overline{C(x)}, y) \rightarrow A(y)) & \text{per sostituzione di } x \text{ con } \overline{C(x)} \\ & \text{nella definizione di } C(x) \\ PA \vdash \Delta(\overline{C(x)}, y) \leftrightarrow \overline{y = C(x/\overline{C(x)})} & \text{lemma 2.2} \\ PA \vdash B \leftrightarrow \forall y(\overline{y = C(x/\overline{C(x)})} \rightarrow A(y)) & \\ PA \vdash B \leftrightarrow A(y/C(x/\overline{C(x)})) & \text{logica dell'identità} \\ PA \vdash B \leftrightarrow A(y/\overline{B}) & \overline{B} = \overline{C(x/\overline{C(x)})} \end{array}$$

Theorem 2.8 (Church) *Se PA è consistente, l'insieme dei teoremi di PA non è ricorsivo.*

DIM. Supponiamo per assurdo che l'insieme dei teoremi di PA sia ricorsivo. Allora, essendo PA sufficientemente potente esiste una formula con una variabile libera $Th(x)$, tale che

- (*) se $PA \vdash A$ allora $PA \vdash Th(\overline{A})$
- (**) se $PA \not\vdash A$ allora $PA \vdash \neg Th(\overline{A})$.

Si consideri la formula $\neg Th(x)$, per il lemma di diagonalizzazione esiste un enunciato B tale che:

$$(***) \quad PA \vdash B \leftrightarrow \neg Th(\overline{B})$$

Se $PA \not\vdash B$ allora $PA \vdash \neg Th(x/\overline{B})$ per (**),

dunque $PA \vdash B$, da (***). Ne segue per *consequentia mirabilis* che

$PA \vdash B$. Allora

$PA \vdash Th(x/\overline{B})$ da (*),

$PA \vdash \neg B$ da (***)

PA è inconsistente.

Theorem 2.9 (Tarski) *Se PA è consistente, allora non esiste una formula $V(x)$ con una sola variabile libera tale che per ogni enunciato D*

$$PA \vdash D \leftrightarrow V(x/\overline{D})$$

DIM. Supponiamo che tale $V(x)$ esista, dunque

$$PA \vdash D \leftrightarrow V(x/\overline{D})$$

per ogni enunciato D

Si consideri la formula $\neg V(x)$,

per il lemma di diagonalizzazione

esiste un enunciato B tale che:

$$PA \vdash B \leftrightarrow \neg V(\overline{B})$$

$$PA \vdash B \leftrightarrow V(\overline{B})$$

poichè vale per ogni enunciato D

$$PA \vdash \neg V(\overline{B}) \leftrightarrow V(\overline{B})$$

Ma ciò contraddice che PA sia consistente.

3 L'aritmetica di Robinson

L'aritmetica di Robinson, R , ha lo stesso linguaggio di PA ed è *finitamente* assiomatizzata dai seguenti assiomi specifici:

$$\text{r1} \quad s(x) = s(y) \rightarrow x = y$$

$$\text{r2} \quad 0 \neq s(x)$$

$$\text{r3} \quad x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = s(y))$$

$$\text{r4} \quad x + 0 = x$$

$$\text{r5} \quad x + s(y) = s(x + y)$$

$$\text{r6} \quad x \times 0 = 0$$

$$\text{r7} \quad x \times s(y) = (x \times y) + x$$

Inoltre definiamo $x < y =_{df} \exists z(z \neq 0 \wedge z + x = y)$ e $x \leq y =_{df} x < y \vee x = y$.

Le funzioni e le relazioni ricorsive sono fortemente rappresentabili in R , quindi vale per R il primo teorema di Gödel. Dalla indecidibilità di R si ricava la indecidibilità della logica del primo ordine PP . Infatti sia A la congiunzione degli assiomi di R chiusi universalmente, se PP fosse decidibile lo sarebbe anche R perchè per ogni enunciato B

$$R \vdash B \quad sse \quad PP \vdash A \rightarrow B$$

.

4 Il predicato $Teor_{PA}$

Definition 4.1 $Teor_{PA}(x)$ sse $PA \vdash \exists y Dim(y, x)$

Theorem 4.2 (1° teorema di Gödel via teorema di Church) *Se PA è consistente, allora è sintatticamente incompleta.*

DIM. Il predicato $Teor_{PA}(x)$ è ricorsivamente enumerabile. Se PA fosse sintatticamente completa, allora il predicato $\neg Fml(x) \vee Teor(neg(x))$, ove ($neg(x)$ applicato al gödeliano di A d'a il gödeliano di $\neg A$), sarebbe a sua volta ricorsivamente enumerabile. Per un risultato di teoria della ricorsività, l'insieme dei teoremi di PA sarebbe ricorsivo, contrariamente al teorema di Church.

Lemma 4.3 *Il predicato unario $Teor_{PA}(x)$ gode delle seguenti proprietà:*

T-1 $PA \vdash A$ implica $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A})$

T-2 $PA \vdash (Teor_{PA}(\overline{A}) \wedge Teor_{PA}(\overline{A \rightarrow B})) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{B})$

T-3 $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A}) \rightarrow Teor(\overline{Teor_{PA}(\overline{A})})$

T-4 $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A})$ implica $PA \vdash A$

DIM. Laboriosa

Theorem 4.4 (1° teorema di Gödel via lemma di diagonalizzazione.) *Se PA è ω -consistente allora è incompleta.*

DIM. Si consideri la formula $\neg Teor(x)$. Per il lemma di diagonalizzazione esiste una proposizione G tale che

$$(*) \quad T \vdash G \leftrightarrow \neg Teor(\overline{G})$$

Se

$PA \vdash G$
 $PA \vdash Teor(\overline{G})$ per [T-1]
 $PA \vdash \neg Teor(\overline{G})$ da (*)

Dunque T è inconsistente, contrariamente all'ipotesi. Ne segue che $PA \not\vdash G$.

Se
 $PA \vdash \neg G$
 $PA \vdash Th(\overline{G})$ da (*)
 $PA \vdash G$ da [T-4]

Di nuovo T è inconsistente, contrariamente all'ipotesi. Ne segue che $PA \not\vdash \neg G$.

Theorem 4.5 (2° teorema di incompletezza di Gödel.) *Se PA è ω -consistente, allora $PA \not\vdash CON_{PA}$.*

DIM. Poniamo

$$CON_{PA} := \neg Teor_{PA}(\overline{\perp})$$

ove \perp è una prefissata contraddizione. Facciamo vedere che

$$PA \vdash G \leftrightarrow CON_{PA}$$

(\rightarrow) $PA \vdash G \rightarrow \neg Teor_{PA}(\overline{G})$ $PA \vdash \perp \rightarrow G$ $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{\perp \rightarrow G})$ $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{\perp}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{G})$ $PA \vdash \neg Teor_{PA}(\overline{G}) \rightarrow \neg Teor_{PA}(\overline{\perp})$ $PA \vdash G \rightarrow \neg Teor_{PA}(\overline{\perp})$ $PA \vdash G \rightarrow CON_{PA}$	lemma di diagonaliz. principio dell'assurdo da [T-1] da [T-2] contrapposizione transitività definizione di CON_{PA}
(\leftarrow)	

$PA \vdash G \rightarrow \neg Teor_{PA}(\overline{G})$	lemma di diagonaliz.
$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{G}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{Teor_{PA}(\overline{G})})$	da [T-3]
$PA \vdash G \leftrightarrow \neg Teor_{PA}(\overline{G})$	lemma di diagonaliz.
$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{G}) \rightarrow \neg G$	contrapposizione
$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{Teor_{PA}(\overline{G})}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{\neg G})$	
$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{G}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{\neg G})$	da [T-1] e [T-2]
$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{G}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{G})$	identità
$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{G}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{G \wedge \neg G})$	
$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{G}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{\perp})$	
$PA \vdash \neg Teor_{PA}(\overline{\perp}) \rightarrow \neg Teor_{PA}(\overline{G})$	contrapposizione
$PA \vdash CON_{PA} \rightarrow G$	definizione di CON_{PA}

Theorem 4.6 (di Löb) *Se T è gödeliana e consistente, allora*

$$T \vdash A \quad sse \quad T \vdash Teor(\overline{A}) \rightarrow A$$

DIM. Supponiamo che tale $V(x)$ esista, dunque

(\rightarrow)		
	$T \vdash A$	ipotesi
	$T \vdash Teor(\overline{A}) \rightarrow A$	a fortiori
(\leftarrow)		
	$T \vdash Teor(\overline{A}) \rightarrow A$	ipotesi
	Si consideri la fbf $Teor(x) \rightarrow A$	allora esiste un enunciato B tale che
	$T \vdash B \leftrightarrow (Teor(\overline{B}) \rightarrow A)$	
	$T \vdash B \rightarrow (Teor(\overline{B}) \rightarrow A)$	
	$T \vdash Teor(\overline{B}) \rightarrow Teor(\overline{Teor(\overline{B}) \rightarrow A})$	
	$T \vdash Teor(\overline{B}) \rightarrow (Teor(\overline{Teor(\overline{B}) \rightarrow Teor(\overline{A})}))$	
	$T \vdash Teor(\overline{Teor(\overline{B})}) \rightarrow (Teor(\overline{B}) \rightarrow Teor(\overline{A}))$	
	$T \vdash Teor(\overline{B}) \rightarrow Teor(\overline{A})$	
	$T \vdash Teor(\overline{B}) \rightarrow A$	dalla prima riga
	$T \vdash B$	dalla seconda riga
	$T \vdash Teor(\overline{B})$	
	$T \vdash A$	Modus Ponens

Theorem 4.7 (2° teorema di Gödel via teorema di Löb) *Se T è gödeliana e consistente, allora*

$$T \not\vdash CON_T$$

DIM. Supponiamo per assurdo che

$$\begin{array}{ll} T \vdash CON_T & \text{allora} \\ T \vdash \neg Teor(\overline{\perp}) \rightarrow \perp & \text{Duns Scoto} \\ T \vdash \perp & \text{teorema di Löb} \end{array}$$

Quindi T è inconsistente, contrariamente all'ipotesi.

Theorem 4.8 *La logica del secondo ordine è semanticamente incompleta*

DIM. Sia AxP la congiunzione dei tre assiomi dell'aritmetica del secondo ordine. Sia $M = \langle D, P(D), P(D^2), P(D^3), \dots \rangle$ una struttura principale. Facciamo vedere che

$$M \models AxP \rightarrow G$$

ove G è l'enunciato di Gödel. Assumiamo che $N \models AxP$, allora poiché P è categorica, M è isomorfo a $N = \langle N, P(N), P(N^2), P(N^3), \dots \rangle$. Ma $N \models G$ e dunque $M \models G$. Se L^2 fosse semanticamente completa avremmo che $L^2 \vdash AxP \rightarrow G$, da cui $AxP \vdash_{L^2} G$, ovvero $P \vdash G$, contrariamente al I teorema di Gödel.

5 I teoremi di Gödel da un punto di vista astratto

Sia dato un linguaggio \mathcal{L} del primo ordine con identità, contenente un insieme infinito numerabile di termini chiusi. Assumiamo che esista una funzione $f: \text{Parole}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{Nomi}(\mathcal{L})$. Se f è fissato, poniamo $f(\pi) = \bar{\pi}$, il gödeliano di π .

Diciamo che una teoria T nel linguaggio dell'aritmetica (questa ipotesi non è essenziale) è *gödeliana* sse esiste una fbf $\Delta(x, y)$ tale che

$$T \vdash \Delta(\overline{A(x)}, y) \leftrightarrow y = \overline{A(x/\overline{A(x)})},$$

per ogni fbf $A(x)$ con una variabile libera.

Theorem 5.1 (di diagonalizzazione o del punto fisso) *Se T è gödeliana e consistente, allora per ogni formula con una sola variabile libera $A(y)$ esiste un enunciato B tale che*

$$T \vdash B \leftrightarrow A(y/\overline{B})$$

DIM. Sia data $A(y)$. Poniamo

$$C(x) := \forall y(\Delta(x, y) \rightarrow A(y)) \quad \text{e} \quad B := C(x/\overline{C(x)})$$

. Allora

$T \vdash B \leftrightarrow C(x/\overline{C(x)})$	per definizione di B
$T \vdash B \leftrightarrow \forall y(\Delta(\overline{C(x)}, y) \rightarrow A(y))$	per sostituzione di x con $\overline{C(x)}$ nella definizione di $C(x)$
$T \vdash \Delta(\overline{C(x)}, y) \leftrightarrow y = \overline{C(x/\overline{C(x)})}$	T è gödeliana
$T \vdash B \leftrightarrow \forall y(y = \overline{C(x/\overline{C(x)})} \rightarrow A(y))$	
$T \vdash B \leftrightarrow A(y/C(x/\overline{C(x)}))$	logica dell'identità
$T \vdash B \leftrightarrow A(y/\overline{B})$	$\overline{B} = \overline{C(x/\overline{C(x)})}$

Theorem 5.2 (Tarski) *Se T è Gödeliana e consistente, allora non si dà il caso che esista una formula $V(x)$ con una sola variabile libera tale che per ogni enunciato D*

$$T \vdash D \leftrightarrow V(x/\overline{D})$$

DIM. Supponiamo che tale $V(x)$ esista, dunque

$T \vdash D \leftrightarrow V(x/\overline{D})$	per ogni enunciato D
Si consideri la formula $\neg V(x)$,	per il lemma di diagonalizzazione esiste un enunciato B tale che:

$T \vdash B \leftrightarrow \neg V(\overline{B})$	
$T \vdash B \leftrightarrow V(\overline{B})$	poichè vale per ogni enunciato D
$T \vdash \neg V(\overline{B}) \leftrightarrow V(\overline{B})$	

Ma ciò contraddice che T sia consistente.

NOTA Una formula monadica $A(x)$ tale che per ogni enunciato D di L si abbia che (*) $T \vdash D \leftrightarrow A(x/\ulcorner D \urcorner)$

è detto bicondizionale di Tarski; esso formalizza la concezione corripudentista della verità:

⌈ it snows ⌋ è vero sse nevica.

La nozione di L -verità in L va al di là della capacità definatoria di L , se T è gödeliano e consistente.

Theorem 5.3 (Church) *Non esistono teorie gödeliane, consistenti e che decidono la propria dimostrabilità, ovvero per le quali esiste una fbf $Th(x)$ con una variabile libera tale che*

- (*) se $T \vdash A$ allora $T \vdash Th(\overline{A})$
- (**) se $T \not\vdash A$ allora $T \vdash \neg Th(\overline{A})$.

DIM. Supponiamo che tale $Th(x)$ esista, dunque per il lemma di diagonalizzazione esiste un enunciato B tale che:

$$(***) \quad T \vdash B \leftrightarrow \neg Th(\overline{B})$$

Se $T \not\vdash B$ allora $T \vdash \neg Th(x/\overline{B})$ per (**),

dunque $T \vdash B$, da (***) . Ne segue per *consequentia mirabilis* che $T \vdash B$. Allora

$T \vdash Th(x/\overline{B})$ da (*),

$T \vdash \neg B$ da (***)

T è inconsistente.

NOTA Se T è una teoria sufficientemente potente (come PA o R), dal lemma 5.3 segue che il predicato di essere teorema per quelle teorie non è ricorsivo.

Theorem 5.4 (1° teorema di Gödel via lemma di diagonalizzazione.) *Sia T gödeliana e ω -consistente. Se esiste una fbf monadica $Teor(x)$ tale che*

- (*) se $T \vdash A$ allora $T \vdash Teor(\overline{A})$
- (a) se $T \vdash Teor(\overline{A})$ allora $T \vdash A$,
allora T è incompleta.

DIM. Si consideri la formula $\neg Teor(x)$. Per il lemma di diagonalizzazione esiste una proposizione G tale che

$$(*) \quad T \vdash G \leftrightarrow \neg Teor(\overline{G})$$

Se

$$T \vdash G$$

$$T \vdash Teor(\overline{G})$$

$$T \vdash \neg Teor(\overline{G})$$

per [T-1]

da (*)

Dunque T è inconsistente, contrariamente all'ipotesi. Ne segue che $T \not\vdash G$.

Se

$$T \vdash \neg G$$

$$T \vdash Th(\overline{G}) \quad \text{da } (*)$$

$$T \vdash G \quad \text{da } (a)$$

Di nuovo T è inconsistente, contrariamente all'ipotesi. Ne segue che $T \not\vdash \neg G$.