Logica del primo ordine

Novembre, 2004

1 Sintassi

Sia $\mathcal{L}^=$ un linguaggio del primo ordine (o predicativo) con identità cosìdefinito.

Alfabeto di $\mathcal{L}^=$

- Simboli logici: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$
- Simboli descrittivi:
  1. Un insieme al massimo infinito numerabile di costanti individuali: $c_1, c_2, ...$;
  2. Un insieme al massimo infinito numerabile di costanti enunciative (o proposizionali): $p_1, p_2, ...$;
  3. Per ogni $n > 0$ un insieme al massimo infinito numerabile di costanti predicative: $P_1^n, P_2^n, ...$;
  4. Fra i predicati binari assumiamo di avere il predicato di identità che indichiamo con $=$.
- Un insieme infinito numerabile di variabili individuali: $x_1, x_2, ...$;
- Simboli ausiliari: le parentesi (,).

Definizione 1.1 (Termini) *Un* termine *è una costante individuale o una variabile.*
$s_1, s_2, ...t_1, t_2...$ sono metavariabili per termini.

Nel seguito useremo:

$a, b, c, d, ...$	come metavariabili per	costanti individuali
$x, y, z, w, ...$	"	variabili individuali
$p, q, r, ...$	"	costanti enunciative
$s_1, s_2, ...t_1, t_2...$	qquad "	termini

Definizione 1.2 (Formule ben formate, fbf, di $\mathcal{L}^=$) .

1. *Se p è una costante enunciativa, p è una formula ben formata (atomica);*
2. *Se P^n è una costante predicativa n-aria e $t_1, ..., t_n$ sono n termini, allora $P^n(t_1, ..., t_n)$ è una fbf (atomica);*

3. *Se A e B sono fbf e x è una variabile, allora $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \to B), (\exists x A), (\forall x A)$ sono fbf;*

La variabile x è detta vincolata *in $(\exists x A), (\forall x A)$ ed A è detto* dominio *del quantificatore $\exists x$, $\forall x$, rispettivamente.*

$A, B, ...$ sono metavariabili per fbf.

Variabili libere Una variabile x è detta *libera* in una fbf A, se almeno una occorrenza di x non è nel dominio di un quantificatore $\exists x$ o $\forall x$.

Formula chiusa Una fbf è detta *chiusa* se non contiene variabili libere.

Importante ! La scrittura $A(x_1, \ldots, x_n)$, ove A è una variabile metalinguistica per fbf, sta solo a ricordare che nella fbf A occorrono al massimo le variabili libere $x_1, \ldots, x_n$. Esempio: se A sta per la fbf $\forall x(x = y) \vee \exists x(x = z)$, la scrittura $A(y, z, w)$ indica che le variabili libere occorrenti in A sono fra y, z, w.

Definizione 1.3 *di $\leftrightarrow$.*
$A \leftrightarrow B =_{df} ((A \to B) \wedge (B \to A))$

Convenzione sulle parentesi Per quanto riguarda l'uso delle parentesi usiamo le convenzioni usuali, ovvero che

1. $\neg, \exists, \forall$ legano più di ogni altro simbolo logico;
2. $\wedge$ e $\vee$, legano più di $\to$ e $\leftrightarrow$;
3. le parentesi più esterne vengono omesse.

Per esempio scriveremo $A \wedge \neg B \to C \vee D$ invece di $(((A \wedge (\neg B)) \to (C \vee D))$.

Definizione 1.4 (Lunghezza di una formula) *La* lunghezza *di una formula A, $lg(A)$, è definita per induzione sulla costruzione di A:*

1. *$lg(p) = 0$, ove p è una costante enunciativa;*
2. *$lg(P^n(t_1, ..., t_n)) = 0$, ove $P^n(t_1, ..., t_n)$ è una fbf atomica;*
3. *$lg(\neg A) = (\exists x A) = (\forall x A) = lg(A) + 1$;*
4. *$lg(A \vee B) = lg(A \wedge B) = lg(A \to B) = lg(A) + lg(B) + 1$.*

Definizione 1.5 (Profondità di una formula) *La* profondità *di una formula A, $pf(A)$, è definita per induzione sulla costruzione di A:*

1. *$pf(p) = 0$, ove p_i è una costante enunciativa;*
2. *$pf(P^n(t_1, ..., t_n)) = 0$, ove $P^n(t_1, ..., t_n)$ è una fbf atomica;*
3. *$pf(\neg A) = (\exists x A) = (\forall x A) = pf(A) + 1$;*
4. *$pf(A \vee B) = pf(A \wedge B) = pf(A \to B) = max(pf(A), pf(B)) + 1$.*

Definizione 1.6 (Sottoformula di una formula) *Sia data una fbf A. Per induzione sulla costruzione di A definiamo quando una fbf B è* sottoformula *di A.*

$A = p$		
B è sbf *di* A	*sse*	$B = p$
$A = P^n(t_1, ..., t_n)$		
B è sbf *di* A	*sse*	$B = P^n(t_1, ..., t_n)$
$A = \neg C, \exists x C, \forall x C$		
B è sbf *di* A	*sse*	$B = A$ *oppure* B è sbf *di* C
$A = C \vee D, C \wedge D, C \rightarrow D$		
B è sbf *di* A	*sse*	$B = A$ *oppure* B è sbf *di* C *o di* D.

Elenchiamo qui di seguito tre tipi di operazioni sintattiche che trasformano fbf in fbf e che sono, a vario titolo, molto importanti.

Sostituzione uniforme di costanti enunciative

- $A[B/p]$ è la fbf ottenuta sostituendo *tutte* le occorrenze in A della costante enunciativa p con la fbf B.

Rimpiazzamento di sottoformule

- $A[B//C]$ è la fbf ottenuta sostituendo *alcune* occorrenze in A della sottoformula C con la fbf B.

Sostituzione di variabili libere

- $A[t/x]$ è la fbf ottenuta sostituendo *tutte* le occorrenze libere in A di x con t.
- $A[t//x]$ è la fbf ottenuta sostituendo *alcune* occorrenze libere in A di x con t;

In tutte le operazioni sopra descritte se la costante enunciativa (sottoformula, variabile) da sostituire non occorre in A oppure occorre vincolata in A, l'operazione di sostituzione è l'operazione identica, ovvero $A[B/p] = A$, $A[B//C] = A$ e $A[t//x] = A$.

2 Il calcolo predicativo classico

Con $K^=$ denotiamo il calcolo predicativo classico il cui linguaggio è $\mathcal{L}^=$ e la cui parte deduttiva si compone dei seguenti schemi di assiomi e regole di inferenza.

Assiomi

A1.1	$A \to (B \to A)$
A1.2	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
A2.1	$A \wedge B \to A$
A2.2	$A \wedge B \to B$
A2.3	$(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
A3.1	$A \to A \vee B$
A3.2	$B \to A \vee B$
A3.3	$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
A5.1	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
A5.2	$A \to (\neg A \to B)$
A5.3	$\neg\neg A \to A$
A6	$\forall x A \to A$
A7	$A \to \exists x A$
A8.1	$t = t$
A8.2	$t_1 = s_1 \wedge ... \wedge t_n = s_n \to (P(t_1, ..., t_n) \leftrightarrow P(s_1, ...s_n))$

Regole di inferenza

$\dfrac{A, \quad A \to B}{B}$		Modus Ponens (MP)
$\dfrac{A \to B}{A \to \forall x B}$	purché x non sia libera in A	Generalizzazione posteriore (GP)
$\dfrac{A \to B}{\exists x A \to B}$	purché x non sia libera in B	Particolarizzazione anteriore (PA)
$\dfrac{A}{A[t/x]}$	purché t sia libero per x in A	Sostituzione di variabili libere (SV)

Un termine t è detto *libero per* x in una fbf A se nessuna variabile occorrente in t cade sotto l'azione di un quantificatore una volta che la sostituzione di t per x in A sia stata eseguita.

Con PC denotiamo il **calcolo proposizionale classico** il cui linguaggio è $\mathcal{L}^\circ$ e avente come assiomi A1.1-A5.3 e come regola d'inferenza MP.

Definizione 2.1 (Derivazione) *Una fbf A è* derivabile *in $K^=$ da un insieme M di formule, in simboli $M \vdash_{K^=} A$, sse esiste una successione finita di formule $A_1, \ldots, A_k$ tale che*

- $A_k = A$
- *per ciascun i, $1 \leq i \leq k$,*
  1. *A_i è un assioma di $K^=$, oppure*
  2. *A_i è una delle formule di M, oppure*
  3. *A_i è ottenuta da formule precedenti della successione mediante applicazione di una regola di inferenza di $K^=$.*

La successione $A_1, \ldots, A_k$ è detta essere una *derivazione* di A da M e le formule di M sono dette *assunzioni*.

Una *dimostrazione* è una derivazione dall'insieme vuoto di assunzioni.

A è *teorema* di $K^=$, $\vdash_{K^=} A$, se esiste una dimostrazione di A in $K^=$.
Esempi di dimostrazione

$A \to A$ Principio di identità

1	$\vdash [A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$	A1.2
2	$\vdash A \to ((A \to A) \to A)$	A1.1
3	$\vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP: 1,2
4	$\vdash A \to (A \to A)$	A1.1
5	$\vdash A \to A$	MP: 3,4

Una volta che un teorema è stato dimostrato, esso verrà utilizzato in successive derivazioni senza riportare la sua dimostrazione, e questo in omaggio alla brevità e leggibilità delle derivazioni stesse e giustificato dal fatto che è comunque sempre possibile inserire nelle varie derivazioni la dimostrazione dei teoremi utilizzati. Ad esempio nella seguente dimostrazione si fa uso del principio di identità appena dimostrato.

$A \to ((A \to B) \to B)$ Legge del Modus Ponens

1	$\vdash ((A \to B) \to (A \to B) \to [((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)]$	A1.2
2	$\vdash (A \to B) \to (A \to B)$	Identità
3	$\vdash ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$	MP.: 1,2
	Poniamo $F = ((A \to B) \to A)$ e $G = ((A \to B) \to B)$	
4	$\vdash (F \to G) \to (A \to (F \to G))$	A1.1
5	$\vdash A \to (F \to G)$	MP.: 3,4
6	$\vdash (A \to (F \to G)) \to ((A \to F) \to (A \to G))$	A1.2
7	$\vdash (A \to F) \to (A \to G)$	MP.: 4,5
8	$\vdash (A \to ((A \to B) \to A)) \to (A \to ((A \to B) \to B))$	def. di F e G
9	$\vdash A \to ((A \to B) \to A)$	A1.1
10	$\vdash A \to ((A \to B) \to B)$	MP.: 7,8

Osservazione

- Data una derivazione $A_1, \dots, A_k$, ogni suo segmento iniziale $A_1, \dots, A_i$, $1 \leq i \leq k$, è una derivazione.
- In ogni derivazione occorre al massimo un numero finito di assunzioni.

Regole direttamente ammissibili Una regola di inferenza

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$$

è detta *direttamente ammissibile in* $K^=$ sse $\vdash_{K^=} A_1 \to (A_2 \to \cdots \to (A_n \to A) \dots)$.

Esempi di regole direttamente ammissibili.

$$\frac{A}{B \to A} \qquad \frac{A \to (B \to C),\ A \to B}{A \to C} \qquad \frac{A \to (B \to C)}{(A \to B) \to (A \to C)}$$

$$\frac{A\ eB}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \qquad \frac{A \to B,\ A \to C}{A \to (B \wedge C)}$$

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B} \qquad \frac{A \to C,\ B \to C}{(A \vee B) \to C}$$

$$\frac{A\ toB,\ A \to \neg B}{\neg A} \qquad \frac{A,\ \neg A}{B} \qquad \frac{\neg\neg A}{A}$$

Anche le regole direttamente ammissibili saranno di grande aiuto per rendere le derivazioni più brevi e più leggibili.

Dimostreremo alcuni teoremi che ci saranno utili in seguito per la prova del teorema di deduzione.

Fusione di premesse (FP): $A \to (A \to B) \to (A \to B)$

1	$\vdash A \to (A \to B)) \to ((A \to A) \to (A \to B))$	A1.2
2	$\vdash A \to A$	Identità
3	$\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to A)$	A1.1:2
4	$\vdash A \to (A \to B) \to (A \to B)$	A1.2:2,3

Legge sillogistica (SIL): $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$

1	$\vdash (C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	A1.2
2	$\vdash (A \to B) \to [(C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))]$	A1.1:1
3	$\vdash [(A \to B) \to (C \to (A \to B))] \to [(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))]$	A1.2:3
4	$\vdash (A \to B) \to (C \to (A \to B))$	A1.1
5	$\vdash (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	MP:3,4

Scambio di premesse (SP): $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

1	$\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to [(B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C))]$	SIL
2	$\vdash B \to (A \to B)$	A1.1
3	$\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to B))$	A1.1:2
4	$\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$	A1.2:1,3
5	$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	A1.2
6	$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$	SIL:4,5

Transitività (T): $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

1	$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	SIL
2	$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	SP:1

Legge di Frege trasposta (FT): $(A \to B) \to ((A \to (B \to C) \to (A \to C))$

1	$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	A1.2
2	$\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C) \to (A \to C))$	SP:1

Legge di importazione (IMP): $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$

1	$\vdash (A \wedge B) \to A) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to (B \to C)))$	T
2	$\vdash A \wedge B \to A$	A2.1
3	$\vdash ((A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to (B \to C)))$	MP:1,2
4	$\vdash (A \wedge B \to B) \to (A \wedge B \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C))$	FT
5	$\vdash A \wedge B \to B$	A2.2
6	$\vdash (A \wedge B \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$	MP:4,5
7	$\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$	T:3,6

Legge di aggiunzione (AGG): $A \to (B \to A \wedge B)$

,

1	$\vdash (B \to A) \to ((B \to B) \to (B \to A \wedge B))$	A2.3
2	$\vdash (B \to B) \to ((B \to A) \to (B \to A \wedge B))$	SP:1
3	$\vdash B \to B$	Identità
4	$\vdash (B \to A) \to (B \to A \wedge B)$	MP:2,3
5	$\vdash A \to (B \to A)$	A1.1
6	$\vdash A \to (B \to A \wedge B)$	T:4,5

Legge di condizionali concatenati (CC): $(A \to (B \to C)) \to ((C \to D) \to (A \to (B \to D)))$

1	$\vdash (C \to D) \to ((B \to C) \to (B \to D))$	SIL
2	$\vdash A \to [(C \to D)) \to [A \to ((B \to C) \to (B \to D))]$	A1.1:1
3	$\vdash [A \to (C \to D)] \to [A \to ((B \to C) \to (B \to D))]$	A1.2:2
4	$\vdash (C \to D) \to (A \to (C \to D))$	A1.1
5	$\vdash (C \to D) \to [A \to ((B \to C) \to (B \to D))]$	T:3,2
6	$\vdash (C \to D) \to [(A \to (B \to C)) \to (A \to (B \to D))]$	CC

Legge di esportazione (EXP): $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$

1	$\vdash (A \to (B \to (A \wedge B)) \to ((A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C)))$	
2	$\vdash A \to (B \to A \wedge B))$	AGG
3	$\vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$	MP:1,2

Ancora regole direttamente ammissibili

$$\frac{A \to B}{(C \to A) \to (C \to B)} \qquad \frac{A \to B,\ C \to A}{C \to B} \qquad \frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$$

$$\frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C} \qquad \frac{A,\ B}{A \wedge B} \qquad \frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}$$

Teoremi predicativi e regole ammissibili di $K^=$

$\vdash_{K^=}\ \forall x A \to A[t/x]$, t libero per x in A.

1	$\forall x A \to A$	A.6
2	$(\forall x A \to A)[t/x]$	SV
3	$(\forall x A)[t/x] \to A[t/x]$	
4	$\forall x A \to A[t/x]$	

$\vdash_{K^=}\ A[t/x] \to \exists x A$

1	$A \to \exists x A$	A.7
2	$(A \to \exists x A)[t/x]$	SV
3	$A[t/x] \to (\exists x A)[t/x]$	
4	$A[t/x] \to \exists x A$	

Sono direttamente ammissibili in $K^=$ le seguenti regole:

$$\frac{\forall x A}{A[t/x]} \qquad \frac{A[t/x]}{\exists x A} \qquad t \text{ libero per } x \text{ in } A.$$

Regole ammissibili Una regola di inferenza

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{A}$$

è detta *ammissibile in* $K^=$ sse se A_1 e ... e A_n sono teoremi di $K^=$, anche A è teorema di $K^=$.

Sono ammissibili in $K^=$ le seguenti regole:

$$\frac{A}{\forall x A}\ (\mathrm{G}) \qquad \frac{A \to B}{\forall x A \to B}\ (\mathrm{GA}) \qquad \frac{A \to B}{A \to \exists x B}\ (\mathrm{PP})$$

Infatti

1	A	Ipotesi
2	$(p \to p) \to A$	A1.1:1
3	$(p \to p) \to \forall x A$	GP
4	$p \to p$	identità
5	$\forall x A$	MP:3,4

1	$A \to B$	Ipotesi
2	$\forall x A \to A$	A6
3	$\forall x A \to B$	T:1,2

1	$A \to B$	Ipotesi
2	$B \to \exists x B$	A7
3	$A \to \exists x B$	T:1,2

$\vdash_{K^=} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A$

1	$\forall y A \to A$	A6
2	$\forall x \forall y A \to A$	GA:1
3	$\forall x \forall y A \to \forall x A$	GP:2
4	$\forall x \forall y A \to \forall y \forall x A$	GP:3

$\vdash_{K^=} \exists y \forall x A \to \forall x \exists y A$

1	$\forall x A \to A$	A6
2	$\forall x A \to \exists y A$	PP:1
3	$\forall x A \to \forall x \exists y A$	GP:2
4	$\exists y \forall x A \to \forall x \exists y A$	PA:3

Definizione 2.2 (Variante alfabetica) *Sia data la fbf* $\forall x B$. *Se* y *non occorre in* B, *allora* $\forall y(B[y/x])$ *è detta essere variante alfabetica di* $\forall x B$.

Lemma 2.3 (Lemma sulle varianti alfabetiche) $\vdash_{K^=} \forall x B$ *sse* $\vdash_{K^=} \forall y B[y/x]$, *dove* $\forall y(B[y/x])$ *è variante alfabetica di* $\forall x B$.

Definizione 2.4 (Chiusura universale) *Sia* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *una fbf contenente al massimo le variabili libere* $x_1, \ldots, x_n$. *Allora* $\forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n)$ *è detta la* chiusura universale *di* $A(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemma 2.5 (Lemma sintattico della chiusura universale) $\vdash_{K^=} A(x_1, \ldots, x_n)$ *sse* $\vdash_{K^=} \forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemma 2.6 (Lemma della costanti) *Se* $M \vdash_{K^=} B(c_1, \ldots, c_n)$ *e le costanti occorrenti in* B *sono tutte fra* $c_1, \ldots, c_n$ *e nessuna di esse occorre in formule di* M, *allora* $M \vdash_{K^=} B[z_1/c_1, \ldots, z_n/c_n]$, *ove* $z_1, \ldots, z_n$ *sono variabili che non occorrono nella derivazione di* $B(c_1, \ldots, c_n)$ *da* M.

Dimostrazione. Sia $D_1, \ldots, D_k$ la derivazione di $B(c_1, \ldots, c_n)$ da M. Si vede facilmente che $D_1[z_1/c_1, \ldots, z_n/c_n], \ldots\ldots, D_k[z_1/c_1, \ldots, z_n/c_n]$ è una derivazione di $B[z_1/c_1, \ldots, z_n/c_n]$ da M.