Da *Elements of Intuitionism* di Michael Dummett, 2000, 2nd.

(Traduzione a cura di E.Tazzari e V.Armenise)

NOTE INTRODUTTIVE

E' stato Frege il primo a indurre filosofi e matematici a riconoscere la mancanza di una trattazione filosofica soddisfacente della natura e base epistemologica della matematica. Egli stesso costruì un sistema completo di filosofia della matematica; e, nella prima parte di questo secolo, altri, soprattutto Hilbert e Brouwer, hanno costruito sistemi alternativi partendo da punti di vista filosofici del tutto diversi. Dei vari tentativi fatti in quel periodo per creare filosofie della matematica onnicomprensive che fornissero, simultaneamente, soluzioni a tutti i problemi filosofici fondamentali riguardanti la matematica, soltanto il sistema intuizionista originato da Brouwer sopravvive oggi come approccio ancora percorribile, preso nel suo insieme, chiunque potrebbe dichiararsi seguace. I due principali sistemi rivali, quello di Frege e quello di Hilbert, hanno dato molti contributi durevoli ai fondamenti della matematica, ma nessuno dei due perdura oggi come un complesso di dottrine alle quali si possa ancora aderire. In tempi più recenti, altri hanno difeso posizioni generali di filosofia della matematica molto divergenti da quelle degli intuizionisti, per esempio la versione gödeliana di platonismo per la quale gli oggetti della matematica non sono più oggetti logici come per Frege, bensì, dati irriducibuli. La filosofia della matematica non è attualmente un campo nel quale abbia luogo la stessa intensa attività come ai primi del secolo, e rimane da vedere se qualcuna di queste successive posizioni sia ancora sostenibile. L'intuizionismo è, comunque, l'unico sistema unitario che sopravvive integro fin dal primo momento quando filosofie rivali della matematica erano in conflitto, ciascuna reclamando di possedere la chiave che avrebbe aperto tutte le porte.

Questo è in parte dovuto al fatto che, mentre Frege e Hilbert pensavano che fosse necessaria una fondazione matematica della matematica, l'intuizionismo rifiutava ogni pretesa di questo genere. Sia per Frege che per Hilbert la matematica classica aveva bisogno di una giustificazione: per Frege la giustificazione doveva essere diretta e per mezzo di essa i principi basilari delle varie branche della matematica (oltre che della geometria) dovevano essere dimostrati facendo appello all' ancor più fondamentale disciplina della logica; per Hilbert, invece, la giustificazione doveva essere indiretta e mostrare che la matematica superiore, sebbene da non prendersi acriticamente, poteva essere vista come un mezzo affidabile per derivare risultati matematici elementari il cui significato non era problematico. Tuttavia entrambi abbracciarono una filosofia della matematica la cui accettabilità dipendeva dal successo di un programma matematico specifico: per Frege la derivazione delle altre teorie matematiche dalla logica; per Hilbert l'attuazione di dimostrazioni di consistenza finitiste delle teorie matematiche. In entrambi i casi, quindi, il sistema filosofico, considerato come teoria unitaria, è crollato allorché i rispettivi programmi matematici si sono dimostrati incapaci di adempiere al loro compito. Nel caso di Frege, dalla scoperta russelliana dei paradossi della teoria degli insiemi, nel caso di Hilbert dal secondo teorema di incompletezza di Gödel. Ovviamente, dal momento che i programmi matematici erano formulati utilizzando termini vaghi, quali "logica" e "finitista", il carattere fatale di quelle scoperte non fu immediatamente evidente; ma in entrambi i casi alla fine divenne manifesto, cosicché, anche se oggi siamo grandemente debitori sia a Frege che a Hilbert, sarebbe impossibile per chiunque dirsi convinto sostenitore di tali teorie.

L'intuizionismo considerò il fatto che la matematica classica sembrava aver bisogno di giustificazione non come una sfida per costruire una tale giustificazione, diretta o indiretta, ma come un sintomo che qualcosa non andava nella matematica classica. Da un punto di vista intuizionista la matematica, purché proceda correttamente, non ha bisogno di alcuna giustificazione dall'esterno, né di un sostegno collaterale né di una fondazione dal basso: essa porta scritta in faccia la sua propria giustificazione. Poiché la matematica classica non mostrava certamente questo carattere, ciò di cui aveva bisogno non era di essere puntellata, ma di essere ricostruita. Quando si fosse giunti ad una comprensione filosofica corretta della natura dell' agire matematico, si sarebbe visto che la ricostruzione della matematica doveva spingersi fino al livello più profondo, quello della logica enunciativa; perfino la comprensione degli operatori logici enunciativi era stata distorta dalle concezioni filosofiche sbagliate dei matematici riguardo al loro ruolo e significato.

L'intuizionismo ha in comune con la filosofia della matematica di Frege (e con altre varianti del platonismo) il fatto di assumere che gli enunciati di una teoria matematica siano asserzioni dotate di significato, alle quali le nozioni di verità e falsità possono essere applicate in senso proprio; l'intuizionismo dunque diverge dal formalismo al pari del platonismo, secondo il quale gli enunciati matematici hanno solo la forma esteriore di asserzioni dichiarative, ma mancano di un qualsiasi contenuto genuino che possa dirsi vero o falso. Inoltre gli intuizionisti sono d'accordo con Frege nel considerare ogni enunciato matematico come avente un contenuto suo proprio, determinato dal modo in cui è costruito a partire dalle sue espressioni costituenti. Così rigettano implicitamente, proprio come fece Frege, una visione olistica del linguaggio della matematica. Secondo tale prospettiva, nessun enunciato matematico, né una teoria matematica nel suo complesso, ha un qualche significato di per sé: essa ha significato solo come parte di altre teorie, in particolare di teorie scientifiche, che possono essere giudicate corrette o scorrette sulla base dell'esperienza, ma, di nuovo, considerate solo come un tutto. Perciò secondo una visione olistica non c'è possibilità di isolare il contributo reso ad una teoria fisica dalla matematica che in essa è impiegata; ancora meno, poi, quella di giudicare corretta o scorretta la parte matematica presa di per sé. Sotto tale punto di vista una teoria matematica, in quanto tale, è incompleta: il suo valore - se c'è - risiederà nella possibilità di essere incorporata in una qualche teoria empirica; e nella misura in cui le teorie matematiche classiche fanno parte di teorie scientifiche che hanno successo, nessuna critica può esser loro mossa.

L'intuizionismo rifiuta la visione olistica della matematica: per esso, come per Frege, ogni asserzione matematica ha un significato completo e specifico di per sé, un significato che la rende suscettibile delle applicazioni che si fanno di essa, e che però è indipendente da qualsiasi ipotesi empirica a cui tali applicazioni possono riallacciarsi. E' per questa ragione che da un punto di vista intuizionista la pratica matematica esistente è passibile di critica: le forme di ragionamento usate all'interno della matematica sono da ritenersi valide, cioè preservanti la verità, relativamente ad una nozione di verità adeguata per asserzioni matematiche; ed è il significato di un'asserzione a determinare quale sia la nozione di verità adeguata per essa, su cosa possiamo ritenere che si fondi il suo essere vera. Dobbiamo quindi guardare al modo in cui conferiamo di fatto significato alle asserzioni matematiche e poi indagare se la nozione di verità per quelle asserzioni, determinata da quel significato, sia realmente garanzia della validità delle forme di ragionamento che siamo abituati ad usare.

L'assunto soggiacente la matematica classica è che noi conferiamo alle asserzioni matematiche un significato che le rende determinatamente vere o false, in modo indipendente dagli strumenti a noi disponibili per il riconoscimento del loro valore di verità. Ciò può essere visto anche per le asserzioni più elementari per le quali non possediamo strumenti effettivi per ottenere una dimostrazione o una refutazione, ad esempio un' asserzione di teoria dei numeri della forma $\exists x A(x)$ dove $A(x)$ è un predicato decidibile. Ci sono svariati problemi irrisolti riguardo ad asserzioni di questa forma, ad esempio se esitano numeri perfetti dispari. Se tale asserzione è vera, allora in linea di principio, siamo capaci di verificarlo, trovando un esempio. Ma non appena si consideri che cosa è richiesto in generale per essere in grado di refutare tale asserzione, ovvero di dimostrare $\forall x \neg A(x)$, riconosciamo che non esiste alcuna base a priori per credere che dobbiamo essere capaci o di dimostrare l'asserzione o di refutarla. Per essere in grado di fornire una dimostrazione di un'asserzione universale quale $\forall x \neg A(x)$, dobbiamo essere in grado o di fornire una singola ragione uniforme del perché ogni numero naturale soddisfi il predicato $\neg A(x)$, oppure trovare almeno una partizione dei numeri naturali in un numero finito di classi tali che per ognuna di esse, possiamo costruire una ragione uniforme del perché i numeri di quella classe soddisfino $\neg A(x)$. (Qui, naturalmente, la "ragione uniforme" potrebbe avere carattere induttivo: potremmo essere in grado di provare che $\neg A(x)$ vale per un qualsiasi numero di una certa classe, una volta dimostrato che vale per tutti i numeri minori di quello nella classe considerata, o ancora, purché valga per tutti i numeri di quella classe che precedono quello dato rispetto ad un prefisssato buon ordinamento.) Secondo l' interpretazione classica o platonista di un'asserzione universale quale $\forall x \neg A(x)$, la sua verità non dipende in alcun modo dall'esistenza di una ragione uniforme o da un numero finito di ragioni uniformi, del perché debba valere. Se l'asserzione è vera, allora per ogni scelta di numero naturale, non è ovviamente casuale che $\neg A(x)$ sia vera di esso, ma può accadere che $\neg A(x)$ sia vero di ogni numero naturale via via scelto, senza che ci sia qualche insieme finito di ragioni in grado di spiegare perché sia così. In questo caso l'asserzione $\forall x \neg A(x)$ sarebbe vera, ma tuttavia si collocherebbe oltre la nostra capacità di trovarne una dimostrazione: ciò che ci consente - da un punto di vista platonista - di concepire una tale possibilità è che la nostra comprensione del quantificatore universale risiede nel nostro essere consapevoli del perché un'asserzione quantificata universalmente sia vera, piuttosto che nell'essere direttamente relati agli strumenti attraverso cui possiamo stabilire tale asserzione come vera.

Dal punto di vista intuizionista questa nozione di verità per le asserzioni matematiche è una mera illusione. Un modo di considerare il problema è il seguente. Quando acquisiamo abilità nell' usare asserzioni contenenti una quantificazione su totalità infinite di oggetti matematici, ciò che di fatto apprendiamo è riconoscere cosa conti come giustificazione di una tale asserzione, cioè in cosa consista una sua dimostrazione, e al tempo stesso apprendiamo cosa possa essere inferito da essa e cosa conti come sua refutazione. Nell'apprendere questi principi molto viene mutuato dal caso della quantificazione sopra totalità finite, ad esempio le leggi di esemplificazione universale[1] e di generalizzazione esistenziale[2]; se così non fosse, l'uso della stessa forma di espressione sarebbe irragionevole. Di fatto ciò che occorre sapere è solo quale tipo di dimostrazione sia necessaria per un'asserzione quantificata universalmente: infatti la generalizzazione esistenziale fornisce la forma generale per la dimostrazione di un'asserzione esistenziale (ossia derivandola da una sua istanza specifica); una refutazione di un'asserzione $\exists x A(x)$ consiste nella dimostrazione di $\forall x \neg A(x)$, una refutazione di un'asserzione $\forall x A(x)$ consiste, in generale, nel ricavare una contraddizione dalla sua assunzione; la forza deduttiva di un'asserzione quantificata universalmente è data dalla regola di esemplificazione universale, mentre quella di un'asserzione esistenziale è governata dal principio secondo il quale B può essere inferito da $\exists x A(x)$ qualora si possa dimostrare $\forall x(A(x) \to B)$. Il fatto che la quantificazione sopra una totalità infinita abbia così tanto in comune con la quantificazione sopra una totalità finita potrebbe indurci a sottovalutare la differenza cruciale che vi è quando si quantifichi sopra una totalità finita che possiamo ispezionare. Nel caso di una totalità infinita non abbiamo neppure in linea di principio un metodo per determinare il valore di verità di un'asserzione quantificata effettuando una ispezione completa degli elementi del dominio e controllando, ad uno ad uno, se il predicato valga per essi. Imparare ad usare asserzioni che coinvolgono quantificazioni su domini infiniti non ci procura alcuna comprensione del perché una tale asserzione sia vera indipendente-

[1] $\forall x A(x) \to A[t/x]$ (NdT)
[2] $A[t/x] \to \exists x A(x)$ (NdT)

mente dalla nostra capacità di dimostrarla: tutto ciò che impariamo è come riconoscere una dimostrazione o una refutazione di tale asserzione. Nel caso di un'asserzione contenente una quantificazione sopra un dominio finito ed ispezionabile, la nostra conoscenza del perché è vera consiste nel sapere come potremmo, almeno in linea di principio, determinare se sia vera o no. Ma nel caso di un'asserzione contenente una quantificazione sopra un dominio infinito, non abbiamo questa possibilità e quindi concepire l'asserzione come avente un determinato ed oggettivo valore di verità indipendentemente dal nostro essere capaci di provarlo o refutarlo, è compiere un' assimilazione fallace del caso infinito a quello finito; la nostra abilità nell'usare asserzioni matematiche non può fornirci alcuna nozione di verità per esse.

Da un punto di vista intuizionista, pertanto, comprendere un'asserzione matematica significa saper riconoscere una sua dimostrazione, quando se ne presenti una; e la verità di una simile asserzione può consistere solo nell'esistenza di tale dimostrazione. Da un punto di vista classico o platonista, comprendere un'asserzione matematica consiste nell'afferrare il perché sia vera, laddove la verità può esserle attribuita anche se non possediamo gli strumenti per riconoscere il fatto; tale tipo di comprensione trascende dunque qualsiasi cosa impariamo, quando impariamo ad usare le asserzioni matematiche. Quindi l'immagine platonista è quella di un regno della realtà matematica, esistente oggettivamente ed indipendentemente dalla nostra conoscenza, il quale rende vere o false le nostre asserzioni. Secondo la prospettiva intuizionista, d'altro canto, l'unica cosa che possa rendere vera un'asserzione matematica è il tipo di dimostrazione che possiamo darne: invero, non una dimostrazione all'interno di un sistema formale, bensì una dimostrazione intuitivamente accettabile, e cioè un certo tipo di costruzione *mentale*. Così, mentre per un platonista una teoria matematica è in rapporto con un qualche regno esterno di oggetti astratti, per un intuizionista è in rapporto con i suoi propri atti mentali: gli oggetti matematici stessi sono costruzioni mentali, vale a dire oggetti del pensiero, non semplicemente nel senso che sono pensabili, ma nel senso che per essi, *esse est concipi*. Essi esistono solamente in funzione del nostro agire matematico, che consta di operazioni mentali, ed hanno solo quelle proprietà che noi riconosciamo che abbiano. E' per questa ragione che la ricostruzione intuizionista della matematica deve interrogarsi anche sulla logica enunciativa impiegata nel ragionamento classico. Il più celebrato principio che soggiace a questa revisione è il rifiuto della legge del terzo escluso: poiché non possiamo, eccezion fatta per gli enunciati più elementari, garantire di trovare o una dimostrazione o una refutazione di una data asserzione, non abbiamo nessun dirittto di assumere, per ogni asserzione, che essa sia vera oppure falsa; né tantomeno di offrire come dimostrazione di un teorema una dimostrazione che sia derivabile dall' assunzione o della verità o della falsità di qualche enunciato ancora indeciso, per esempio l' ipotesi di Riemann (una ben nota dimostrazione di Littlewood procede esattamente in questo modo). La ricostruzione intuizionista non consiste solamente in una revisione della logica sottostante: di uguale importanza è la sua trattazione della nozione di successione infinita. Comunque è dalla riconsiderazione delle forme basilari degli argomenti logici che la ricostruzione prende avvio; ed anche noi dobbiamo partire da lì.